Jesús Manuel Hernández Soto • Homero Solano Gómez • Leopoldo Jiménez Malagón

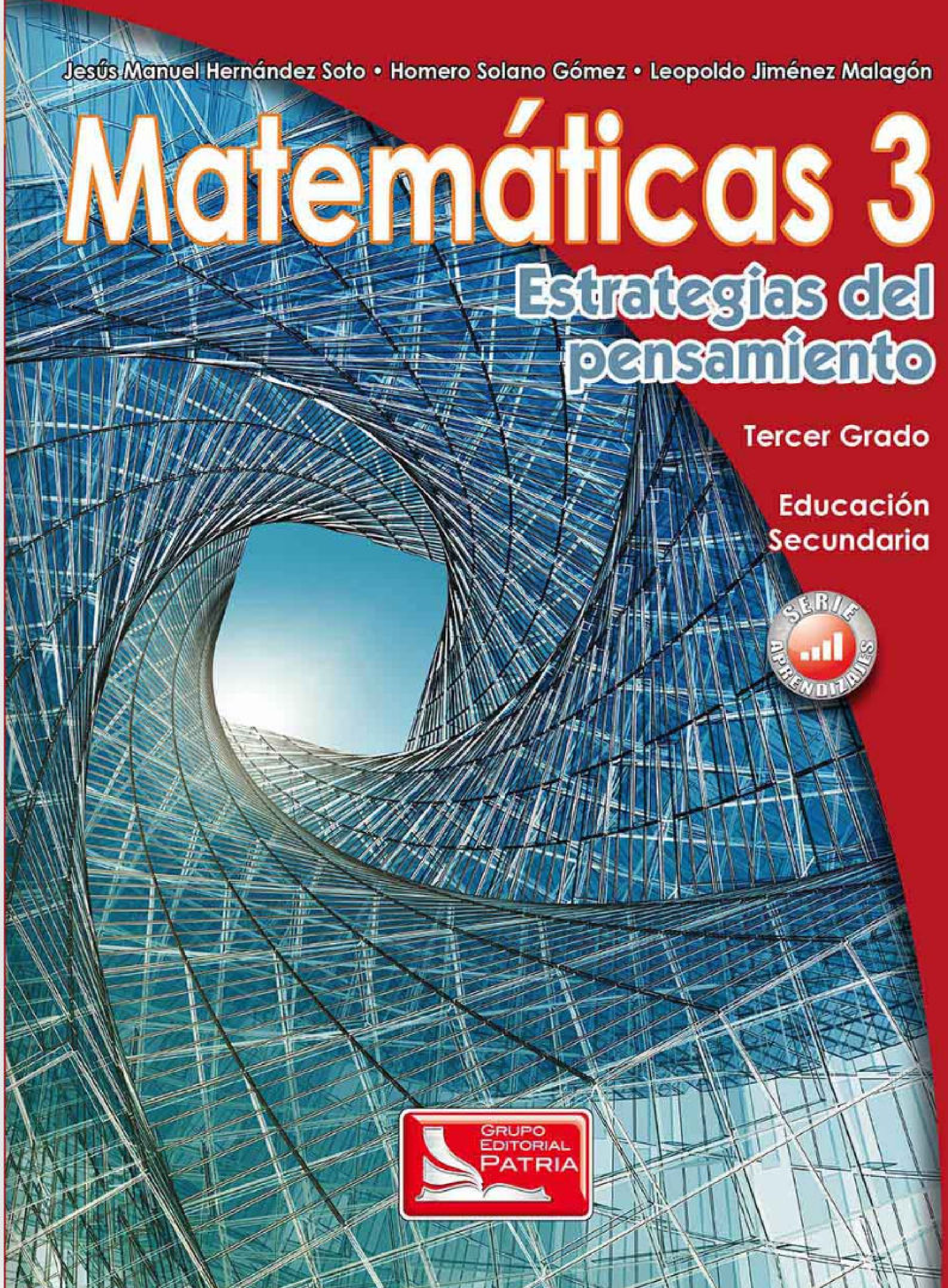
Matemáticas 3

Estrategias del pensamiento

Tercer Grado

Educación Secundaria

SERIE APRENDIZAJES



GRUPO EDITORIAL PATRIA

Dirección editorial: Tomás García Cerezo, Alberto García Rodríguez
Gerencia de contenidos: María Antonieta Salas Chávez, Gabriela Ramírez Salgado
Coordinación de contenidos: José de Jesús Arriaga Carpio, Mariana Calero Sánchez
Coordinación editorial: Angélica C. Sánchez Celaya
Edición: Maricela García Núñez
Revisión técnica: Lorenzo Sánchez Alavez
Diseño y formación editorial: Mario A. Tenorio Murillo,
Susana Meléndez De la Cruz, Alexandro Portales Padilla
Corrección de estilo y editorial: Marco Antonio Vázquez Barrera,
Agustín Cervantes Aguilar, Bernardo Martínez Melgoza
Diseño de portada: Mónica Huitrón Vargas
Ilustraciones: Jorge Núñez Silva, Jennifer Gabriela Islas Téllez,
Alexandro Portales Padilla
Iconografía: Karla Flores Choza

Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN: 978-607-438-700-1

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición, 2014
Primera edición revisada, 2017
Primera reimpresión, 2018

Presentación

Sin duda, las matemáticas han formado parte de la historia de la humanidad y en la actualidad son indispensables en nuestra sociedad. Están presentes en todas las ramas del saber, en los modelos teóricos que intentan describir o predecir los fenómenos de la naturaleza y, en general, en las actividades del ser humano. El desarrollo económico y tecnológico de un país no sería posible sin ellas, la telefonía móvil, las cámaras digitales, los cajeros automáticos, el pronóstico del tiempo, internet y los videojuegos son algunos ejemplos de la enorme utilidad de esta asignatura. Por éstas y muchas otras razones son fundamentales en la educación básica de los adolescentes, no sólo por el conocimiento matemático en sí mismo, sino porque enseñan a pensar.

La didáctica moderna demanda lograr que el alumno se convierta en un agente activo de su propio aprendizaje. Hacer de dicho aprendizaje un proceso dinámico, creativo y propicio para que sea el alumno quien construya los significados matemáticos y los valide al confrontarlos con el conocimiento formal matemático.

Al conjugar estas reflexiones con la experiencia de varios años como profesores de la asignatura, se elaboró el libro *Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento.* En él se busca que los estudiantes enfrenten retos que los lleven a desarrollar las competencias matemáticas de la asignatura. Para lograrlo, se diseñaron actividades pertinentes, graduadas y coherentes que presentan desafíos intelectuales, generan interés por encontrar diversas vías de solución y buscan que los estudiantes indaguen, cuestionen, analicen, comprendan y reflexionen de manera integral sobre la esencia de los aspectos involucrados en los contenidos matemáticos fundamentales para el nivel de secundaria. Buscamos aprovechar en todo momento lo que el alumno sabe para avanzar en la construcción de nuevos conocimientos, auxiliándose de técnicas y procedimientos eficaces que involucran tanto el sentido común como el razonamiento, sin dejar a un lado la aplicación de estos conocimientos en situaciones cotidianas que enfrentan los estudiantes de este nivel educativo.

Se proponen aquí estrategias en las que se combina el trabajo individual con las actividades en pareja y por equipos, de tal forma que se favorezca la colaboración, fundamental para la construcción de los contenidos que se desarrollan en cada lección. Además, durante la interacción con el objeto de conocimiento y con la convivencia, se propicia que los estudiantes expresen sus descubrimientos, soluciones, reflexiones, dudas, coincidencias y divergencias, para así construir de manera colectiva los aprendizajes esperados en cada bloque, además de recibir formación académica y valores.

Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento, es una herramienta de trabajo que, junto con la experiencia y el compromiso de todos los involucrados, será útil en la continuidad del proceso educativo de los adolescentes que cursan el tercer grado de la escuela secundaria.

Los autores

Presentación

Estimado alumno:

Te presentamos el libro *Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento*, en el que encontrarás diversas propuestas de trabajo acordes con el tercer grado de la escuela secundaria; con tus conocimientos previos y construirás nuevos aprendizajes con el apoyo de tu profesor y tus compañeros de grupo. A lo largo del año escolar desarrollarás competencias matemáticas para enfrentar situaciones cada vez más complejas, además de fomentar en ti los valores necesarios para el desarrollo pleno de tu vida en la sociedad en la que te desenvuelves.

Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento también te ofrece la oportunidad de expresarte, de cuestionar y participar de manera activa en la construcción de tu propio conocimiento, además de brindarte la posibilidad de adquirir herramientas matemáticas que te servirán para afrontar diversas situaciones en tus tareas cotidianas y en el futuro. Asimismo, dichas herramientas fomentarán actitudes y valores esenciales en el desarrollo de competencias que te llevarán a lograr los aprendizajes planteados en cada bloque.

El libro está proyectado para convertirse en un instrumento útil que te acompañe durante el estudio de esta asignatura y para que, con el apoyo de tu profesor, desarrolles las siguientes competencias.

- Resolución de problemas de manera autónoma. Implica saber identificar, plantear y resolver problemas utilizando diversos procedimientos y reconociendo los más eficaces.
- Comunicar información matemática. Significa que serás capaz de expresar, representar e interpretar información contenida en una situación o fenómeno.
- Validar procedimientos y resultados. Podrás expresar y justificar tus procedimientos y soluciones encontradas mediante el razonamiento y la demostración.
- Manejar técnicas de manera eficiente. Se refiere al uso adecuado de los números y las operaciones al resolver un problema, y la evaluación y pertinencia de los resultados, así como la adaptación para resolver problemas en diferentes contextos.

Te damos la más cordial bienvenida a este nuevo curso. Deseamos que tengas mucho éxito en esta etapa que inicias y esperamos que este material sea de utilidad en tu formación académica.

Los autores

Presentación

Estimado profesor:

Las matemáticas forman parte de la educación de los adolescentes por el conocimiento que aportan, por la oportunidad que brindan para pensar y por la enorme utilidad en todos los ámbitos de la vida cotidiana. *Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento* ha sido elaborado con la intención de apoyar a cada integrante de la comunidad escolar para enfrentar y responder diversos problemas que la vida moderna les presenta, auxiliándose de los conocimientos construidos en el aula, así como de las habilidades desarrolladas y actitudes promovidas en los grados escolares que le anteceden.

Las lecciones fueron diseñadas para incluir actividades de estudio que beneficien la formación del pensamiento crítico; en ellas predomina el respeto por las capacidades mentales activas de los estudiantes, y se les brinda la oportunidad de actuar y tomar decisiones con criterio propio sin soslayar la apertura a la crítica, la duda y la curiosidad. Además, se busca despertar en los alumnos el interés por la reflexión; se les invita a buscar y encontrar diferentes formas de resolver problemas, a poner en juego la intuición, sin dejar de lado las herramientas matemáticas que permitan ampliar, reformular o rechazar ideas previas, para generar conclusiones con argumentos que validen sus resultados.

En esta propuesta los conocimientos están organizados de tal manera que los estudiantes pueden tener acceso gradual a otros más complejos, y establecer conexiones entre lo que saben y lo que están por aprender.

Se busca la participación activa y crítica de los estudiantes para que formulen, comuniquen, argumenten y pongan en práctica tanto reglas matemáticas como diversas técnicas que les permitan tomar las mejores decisiones ante diferentes situaciones.

Al final de cada bloque se presentan problemas similares al modelo de las evaluaciones finales tipo PISA, en los que se consideran los aprendizajes esperados de dicho bloque. Estos aprendizajes servirán para que el alumno alcance los estándares relacionados con la calidad educativa.

En síntesis, el propósito es ofrecer al docente elementos que, aunados a su experiencia, creatividad y compromiso, le ayuden organizar y orientar su actividad cotidiana para responder con éxito a las exigencias que demanda la sociedad mexicana del siglo XXI.

Le deseamos mucho éxito en la labor docente que desempeña y esperamos que el libro *Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento* cumpla con las expectativas y las necesidades que enfrenta en su tarea diaria.

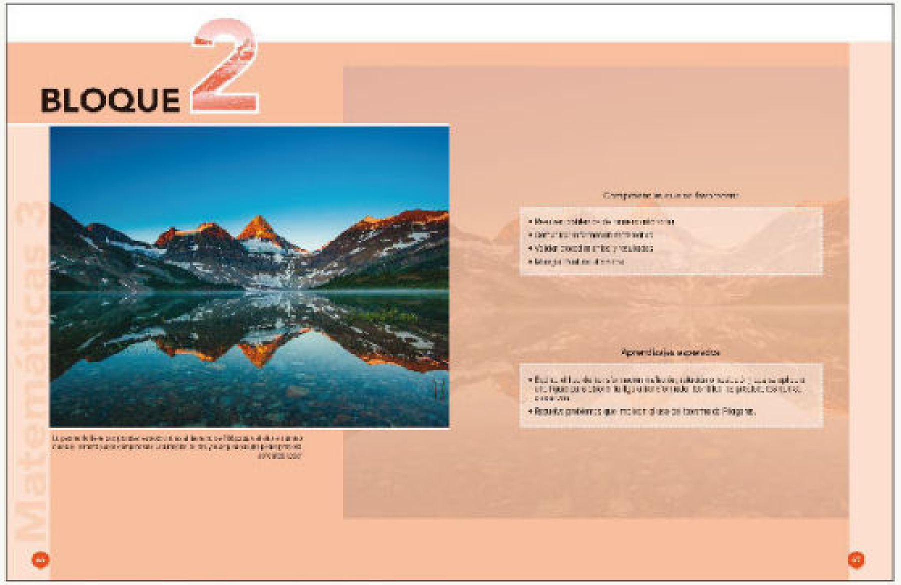
Los autores

Estructura de la obra

A continuación te presentamos la estructura de la obra, es decir, la función y disposición de los distintos elementos que organizan el contenido de este libro, el cual está dividido en cinco bloques.

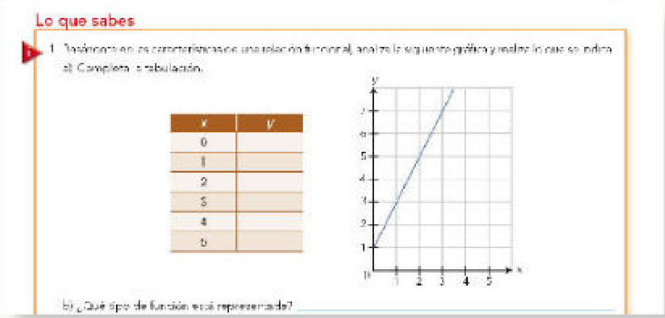
Entrada de bloque

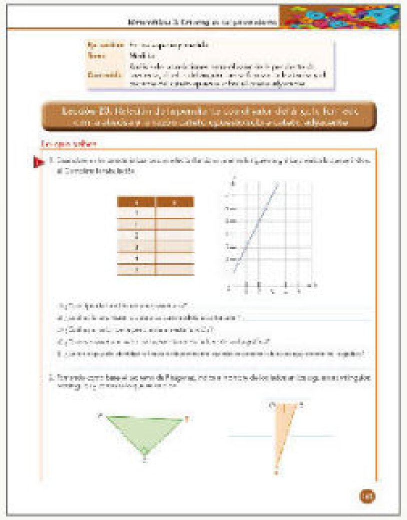
Indica el inicio de cada una de las cinco partes que componen la obra. En las dos páginas que la integran se asientan los aprendizajes esperados de cada bloque, y con una ilustración relacionada con uno o varios contenidos del bloque, que se complementa con una cita de algún famoso matemático.



Lo que sabes

Mediante actividades de inicio se plantean una serie de preguntas dirigidas a que los alumnos reflexionen y activen los conocimientos que tienen con relación al tema que será desarrollado.

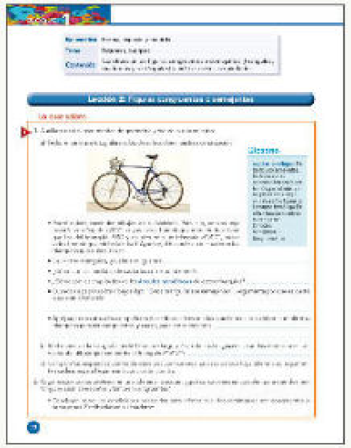


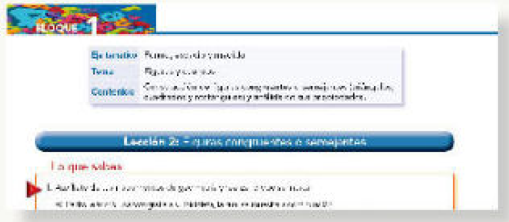


Estructura de la obra

Lecciones

Están basadas en la aplicación de conocimientos para la resolución de problemas. En cada lección se indica el eje temático al que pertenece y el contenido que aborda.

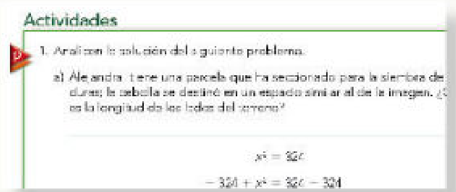


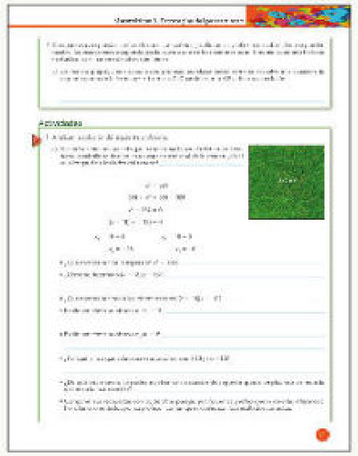


Actividades

Planteadas para propiciar el logro de los aprendizajes esperados y el desarrollo de competencias matemáticas, fomentando la reflexión y su aplicación en situaciones cotidianas. El ícono indica el tipo de actividad por realizar: individual, en pareja, en equipo o grupal; se muestra con una letra inicial.

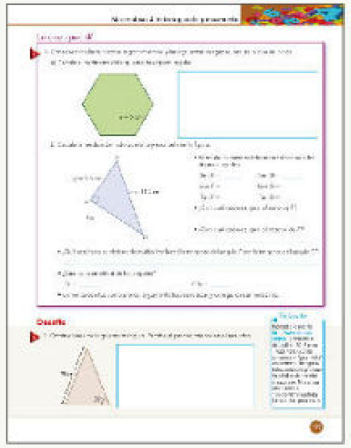
- i Individual
- p Parejas
- e Equipo
- g Grupal

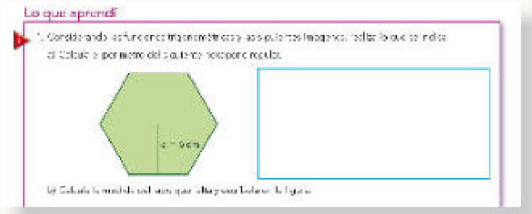




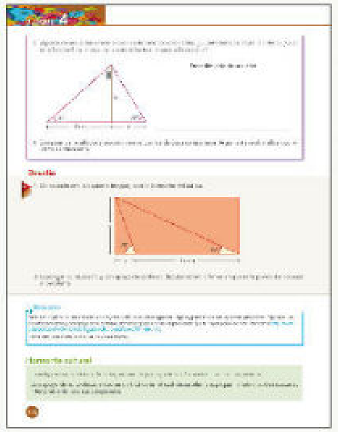
Lo que aprendí

Indica el cierre de la lección. Es una parte que engloba los conocimientos construidos a lo largo de cada lección y su utilidad en la vida cotidiana.





Estructura de la obra

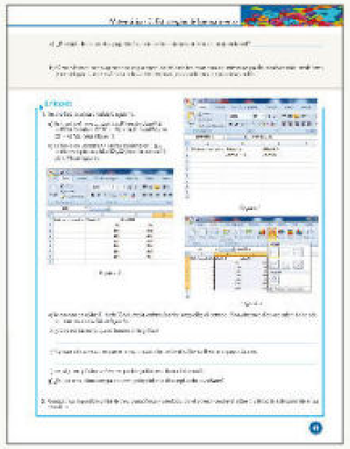


Desafío

Apartado donde se presenta una actividad para que los alumnos reflexionen, razonen y expongan sus propias estrategias para la resolución de problemas.

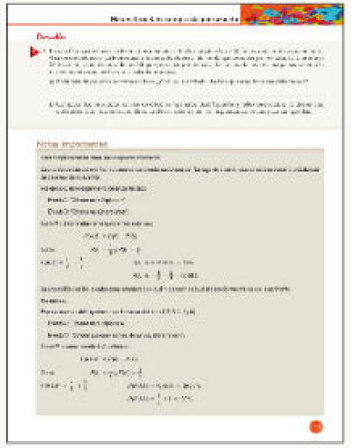
Enlázate

Esta sección propone sitios y actividades relacionados con las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), para profundizar en los contenidos del proyecto.



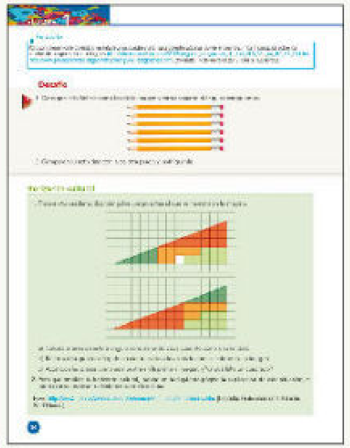
Notas importantes

Sintetizan los conocimientos teóricos que se necesitan en el desarrollo de los temas abordados en las lecciones y que conviene recordar.



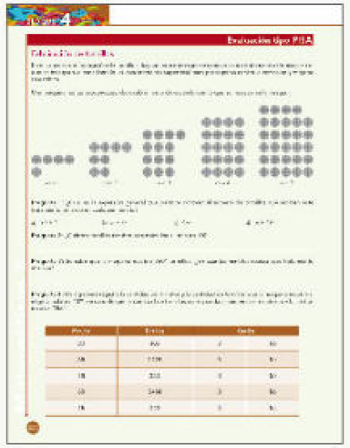
Horizonte cultural

Cápsulas con información adicional que complementan el estudio del tema y resultan significativas en la formación del alumno.



Evaluación tipo PISA

Tiene como propósito identificar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del bloque, enfocándose en los aprendizajes esperados. El diseño de esta evaluación es similar al modelo de las evaluaciones PISA.



Índice

- **Presentación** ... 3
- **Estructura de la obra** ... 6
- **Dosificación de contenidos** ... 10

Bloque 1 12

- **Lección 1:** Problemas que implican ecuaciones cuadráticas ... 14
- **Lección 2:** Figuras congruentes o semejantes ... 22
- **Lección 3:** Criterios de congruencia y semejanza de triángulos ... 29
- **Lección 4:** Tablas y gráficas de relaciones proporcionales ... 35
- **Lección 5:** Tablas de relaciones cuadráticas ... 42
- **Lección 6:** Eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes ... 47
- **Lección 7:** Diseño de un encuesta ... 57
- **Evaluación tipo PISA** ... 64

Bloque 2 66

- **Lección 8:** Problemas que implican ecuaciones cuadráticas ... 68
- **Lección 9:** Rotación y traslación de figuras ... 76
- **Lección 10:** Diseños geométricos ... 86
- **Lección 11:** Relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo ... 93
- **Lección 12:** Explicitación y uso del teorema de Pitágoras ... 100
- **Lección 13:** Probabilidad, regla de la suma ... 107
- **Evaluación tipo PISA** ... 112

Bloque 3 114

- **Lección 14:** Solución de ecuaciones cuadráticas por fórmula general ... 116
- **Lección 15:** Congruencia y semejanza de triángulos ... 125
- **Lección 16:** Teorema de Tales ... 132
- **Lección 17:** Figuras homotéticas ... 138
- **Lección 18:** Gráficas de funciones cuadráticas ... 144
- **Lección 19:** Gráficas formadas de secciones rectas y curvas ... 151
- **Lección 20:** Probabilidad de eventos independientes ... 158
- **Evaluación tipo PISA** ... 164

Bloque 4 166

- **Lección 21:** Sucesiones cuadráticas ... 168
- **Lección 22:** Sólidos de revolución ... 177
- **Lección 23:** Relación de la pendiente con el valor del ángulo formado con la abscisa y la razón cateto opuesto sobre cateto adyacente ... 185
- **Lección 24:** Razón seno y coseno en un triángulo rectángulo ... 193
- **Lección 25:** Uso de las razones trigonométricas ... 200
- **Lección 26:** Razón de cambio y pendiente de una recta ... 207
- **Lección 27:** Medidas de dispersión: desviación media y rango ... 214
- **Evaluación tipo PISA** ... 222

Bloque 5 224

- **Lección 28:** Solución y planteamiento de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones ... 226
- **Lección 29:** Cortes en un cilindro o un cono recto ... 233
- **Lección 30:** Volumen de cilindros y conos ... 242
- **Lección 31:** Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos ... 249
- **Lección 32:** Variación lineal o cuadrática ... 255
- **Lección 33:** Resultados equiprobables y no equiprobables ... 262
- **Evaluación tipo PISA** ... 268

- **Bibliografía** ... 270

Dosificación de contenidos

Eje	Tema	Contenido	Lección	Página	Sesiones	Dosificación personal
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1	14	6	
		Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	8	68	6	
		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	14	116	6	
		Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	21	168	6	
		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	28	226	8	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	2	22	4	
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	3	29	4	
		Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	9	76	5	
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	10	86	5	
		Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	15	125	5	
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	16	132	5	
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	17	138	5	
		Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	22	177	5	
	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	11	93	5	
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	12	100	5	
		Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	23	185	5	
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	24	193	5	
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	25	200	5	
		Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	29	233	5	
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	30	242	5	
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	31	249	5	

Dosificación de contenidos

Eje	Tema	Contenido	Lección	Página	Sesiones	Dosificación personal
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	4	35	5	
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	5	42	5	
		Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18	144	6	
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	19	151	6	
		Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	26	207	7	
		Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	32	255	8	
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	6	47	5	
		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	13	107	6	
		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	20	158	6	
		Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	33	262	6	
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	7	57	6	
		Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	27	214	6	

BLOQUE 1

No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas ni ninguna de las basadas en las matemáticas.

Leonardo da Vinci

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientes

Aprendizaje esperado

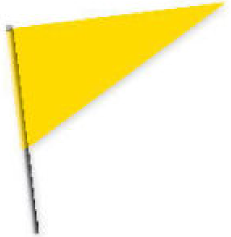
- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Lección 1: Problemas que implican ecuaciones cuadráticas

Lo que sabes

1. Analiza la siguiente situación y responde lo que se pide.



a) Para decorar una maqueta de la escuela, Fernando está haciendo unos banderines de papel como el de la figura. El lado más largo del banderín mide 11 cm, el lado que está pegado al asta mide la mitad de la longitud del tercer lado del banderín. Si el triángulo formado tiene un perímetro de 29 cm.

- ¿Cuánto mide el lado pegado al asta? ____________
- Argumenta tu respuesta. ____________

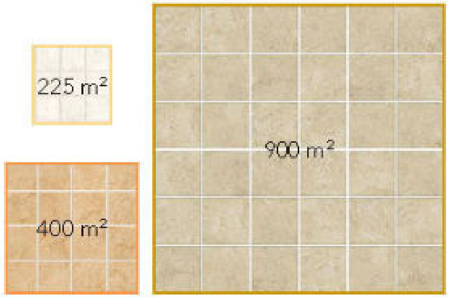
- Escribe una ecuación que modele esta situación. ____________
- ¿Cómo se lee en lenguaje común esta ecuación? ____________
- ¿Qué letra ocupaste como incógnita para tu ecuación? ____________
- Resuelve la ecuación en el siguiente espacio y compárala con la respuesta que obtuviste anteriormente.

- Con la orientación de tu profesor reúnete en equipo, elijan una ecuación y preséntenla al grupo, incluyan el procedimiento de solución.
- Reflexionen sobre las diferencias y/o semejanzas que hayan encontrado entre sus respuestas.
- Analicen y concluyan si puede haber más de una forma para resolver el problema y la ecuación. Escriban sus conclusiones.

Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y contesten en su cuaderno lo que se indica.

a) Una empresa solicitó losetas para cubrir tres áreas de las siguientes dimensiones.



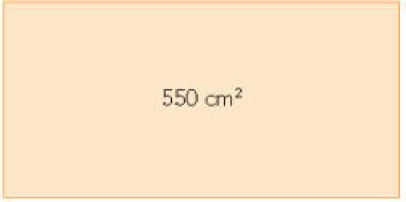
- ¿Cuánto medirá por lado cada loseta? ____________
- Justifiquen su respuesta. ____________
- Escriban una ecuación para este planteamiento. ____________
- ¿Cómo se lee en lenguaje común la ecuación que formaron? ____________
- ¿Qué características tiene esta ecuación? ____________
- Expongan al grupo su ecuación y con apoyo de su profesor discutan si cumple o no con las características del problema. Analicen sobre si esta expresión es o no de primer grado y escriban las conclusiones en el cuaderno.
- Escriban en su cuaderno el procedimiento que siguieron para resolver esta ecuación.
- Analicen y argumenten si esta ecuación tiene más de dos soluciones. Comenten entre ustedes cuáles son.
- ¿Por qué corresponden o no a la solución del problema? ____________
- Comparen con otras parejas las diferencias y/o semejanzas en el proceso de solución de la ecuación. Con apoyo de su profesor reflexionen sobre la posibilidad de resolver con otro procedimiento la ecuación dada y escríbanlo. ____________

b) Reproduzcan en fichas bibliográficas las siguientes tarjetas, con ellas formen todas las ecuaciones de segundo grado posibles.

x^2	$=$	$-$	15	85

- ¿Cuántas ecuaciones diferentes formaron? ____________
- Coordinados por su profesor, escriban en el pizarrón todas las ecuaciones que formaron y resuélvanlas.
- Escriban la ecuación que les asignaron. ____________
- ¿Cuál es el valor de la incógnita de esta ecuación? ____________
- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otras parejas y argumenten sobre las diferencias o semejanzas que tengan. Argumenten si todas las ecuaciones que se formaron tienen solución.

c) Observen la figura que representa el área de un terreno.



- Si el largo mide 3 m más que el ancho, ¿cuál es la dimensión del terreno? ______
- Justifiquen su respuesta. ______
- Escriban la expresión algebraica que representa las dimensiones del terreno.

Largo. ______ Ancho. ______

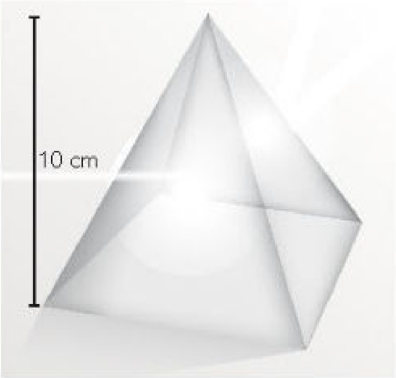
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área del terreno? ______
- ¿Qué semejanza tiene con las ecuaciones de los problemas anteriores? ______
- Expongan al grupo la forma en que calcularon las medidas del rectángulo y orientados por su profesor compárenlos, corrijan de ser necesario.

2. Consideren los procedimientos utilizados anteriormente y planteen una ecuación para cada una de las siguientes situaciones. Una vez planteada cada ecuación resuélvanlas en su cuaderno.

a) Un número elevado al cuadrado más doce da como resultado 181, ¿cuál es ese número? ______
- Ecuación. ______

b) La suma de las edades de Ana y Roberto es de 25 años y el producto es 150. Él es menor que ella, ¿cuántos años tiene Roberto? ______
- Ecuación. ______

c) El volumen del siguiente prisma es de 250 cm³. ¿Cuál es el perímetro de la base del prisma? ______



- Ecuación. ______

d) Es posible que las ecuaciones que plantearon para resolver los problemas anteriores hayan sido resueltas por ensayo y error, o bien, usando operaciones inversas. Con el apoyo de su profesor describan en qué consisten cada uno de estos procedimientos y escríbanlo en su cuaderno.

e) Investiguen dos ejemplos de cómo se pueden aplicar las ecuaciones cuadráticas en la aeronáutica y en la ingeniería. Posteriormente compártanlos con su grupo y profesor.

Notas importantes

Considera la siguiente información.

La ecuación en donde la incógnita está elevada al cuadrado se denomina *"ecuación cuadrática o de segundo grado"*. Esta expresión matemática se refiere a la igualdad algebraica donde el grado mayor de la incógnita es 2. Una ecuación de segundo grado es completa cuando se presenta en la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

O bien, incompleta, cuando se muestra en la forma:

$ax^2 = 0$; $ax^2 + bx = 0$ o $ax^2 + c = 0$.

Se expresa en forma general como:

$ax^2 + bx + c = 0$

Donde:

- x es la incógnita
- ax^2 es el término cuadrático
- bx es el término lineal
- c es el término independiente

Al valor de la incógnita que satisface la ecuación se le llama raíz de la ecuación. Una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Actividades

1. Analicen la siguientes situaciones.

a) ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $x^2 = 36$? ______
- Comprueben su resultado. ______
- Discutan si es el único resultado que satisface la ecuación. ______ ¿Por qué? ______
- Comparen sus respuestas con otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

b) Analicen la siguiente tabla con la que se pretende dar solución a la ecuación $x^2 + 2x = 80$ y complétenla sugiriendo cinco valores distintos para x.

x	x^2	$2x$	$x^2 + 2x =$	80

- Describan el procedimiento que se empleó en esta tabla para obtener los valores de x. ______
- ¿Cuáles son las raíces de esta ecuación? ______
- Discutan sobre la conveniencia de usar o no el procedimiento empleado en la tabla anterior para obtener las raíces de una ecuación.
- Reflexionen y escriban una conclusión sobre las ventajas y desventajas de usar el procedimiento empleado en la tabla. ______
- De manera grupal y con el apoyo de su profesor, argumenten si el procedimiento empleado en la tabla puede ser o no un recurso para justificar que las raíces obtenidas satisfacen la ecuación propuesta.

Actividades

1. Planteen un problema para cada una de las siguientes ecuaciones, y resuélvanlos por ensayo y error, por operaciones inversas o por tabla de valores. Comprueben sus resultados empleando un procedimiento distinto al que usaron para resolverlas.

   a) $x^2 = 81$

   b) $x(x + 8) = 480$

   c) $x^2 + 11 = 92$

   d) $x^2 = 3x$

2. Expongan al grupo sus planteamientos, y con apoyo de su profesor elijan los tres que sean más interesantes y cópienlos en su cuaderno.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas, planteando y resolviendo la ecuación correspondiente para cada uno.

   a) El precio de tela por metro cuadrado es de \$175. Claudia pagó \$1 575 por la tela de forma cuadrada que compró. ¿Cuáles son las dimensiones de la tela comprada por Claudia?

   b) Alejandra abrió su libro de matemáticas y comentó a sus compañeros: Si multiplico los números de páginas, el resultado es 3 422. ¿En qué páginas abrió Alejandra el libro?

   c) Mario se ejercita en una cancha como ésta. ¿Cuántos metros corre si le da tres vueltas a la cancha? ______

x

$x + 30$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 - 10x = 119$ ______

   b) $2x^2 + 4x = 70$ ______

c) Elige una de las ecuaciones anteriores y plantea un problema que se resuelva con dicha ecuación.

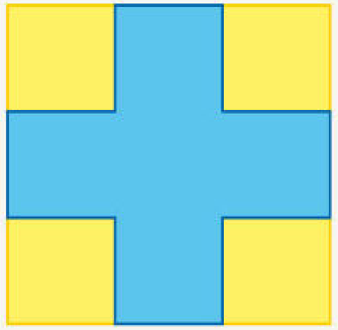
d) En el siguiente recuadro justifica las raíces de la ecuación que elegiste.

3. Compara con otros compañeros tus resultados y reflexionen sobre los procedimientos utilizados. Si realizaron algún procedimiento personal apóyense con su profesor y compártanlo con el grupo.

Desafío

1. Pongan a prueba lo que aprendieron y resuelvan el siguiente problema.

a) Para la confección de una bandera se presentó el siguiente diseño.



- Se requiere que el área de la superficie en azul sea de 672 cm² y que cada cuadrado amarillo mida 12 cm por lado. ¿Cuánto mide por lado esta bandera? ______

2. Comparen su procedimiento y resultado con otros compañeros, en caso de haber diferencias justifíquenlas. Con el apoyo de su profesor analicen lo que realizaron y lleguen a un acuerdo sobre la solución a este problema.

Horizonte cultural

Lee los siguientes pasajes de la historia de las matemáticas en los que se mencionan algunos de los orígenes de las ecuaciones. Coméntalos con tus compañeros y con la orientación de tu profesor resalten aquellos en los que se mencionan las ecuaciones de segundo grado, incrementen la información y organicen un periódico mural para su comunidad escolar.

Un poquito de la historia del álgebra

¿Sabías que el álgebra que se estudia en secundaria es muy antigua?
Aquí encontrarás algunos pasajes de su historia.

- Desde el siglo XVII a.n.e. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primero y segundo grado. También resolvían algunos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Alrededor del siglo I los matemáticos chinos escribieron el libro *Jiu zhang suan shu (El arte del cálculo)*, en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Con su ábaco *(suan zi)* tenían la posibilidad de representar números positivos y negativos.
- En el siglo III el matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su *Aritmética* en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas, se trataron de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.
- Siglo IX. Época en la que trabajó el matemático y astrónomo musulmán Al-Jwarizmi, cuyas obras fueron fundamentales para el conocimiento y el desarrollo del álgebra. Al-Jwarizmi investigó y escribió acerca de los números, de los métodos de cálculo y de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Su nombre en latín dio origen a la palabra *algoritmo* que fue, usada primero para referirse a los métodos de cálculos numéricos en oposición a los métodos de cálculo con ábaco, adquirió finalmente su sentido actual de "procedimiento sistemático de cálculo". En cuanto a la palabra *álgebra*, deriva del título de su obra más importante, que presenta las reglas fundamentales del álgebra, *Al-jabr wal muqabala*.
- En el año 1202, después de viajar al norte de África y al Oriente, donde aprendió el manejo del sistema de numeración indoarábigo, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, publicó el *Liber Abaci (Tratado del Ábaco)*, obra que en los siguientes tres siglos fue la fuente principal para todos aquellos estudiosos de la aritmética y el álgebra.
- En 1525, el matemático alemán Christoph Rudolff introdujo el símbolo de la raíz cuadrada que usamos hoy en día. Este símbolo era una forma estilizada de la letra "r" de radical o raíz.
- Entre 1545 y 1560, los matemáticos italianos Girolamo Cardano y Rafael Bombelli se dieron cuenta de que el uso de los números imaginarios era indispensable para poder resolver todas las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado.
- En 1637, el matemático francés René Descartes fusionó la geometría y el álgebra inventando la "geometría analítica". Inventó la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, *a, b, c,...* y las variables o incógnitas por las últimas, *x, y, z*. Introdujo también la notación exponencial que usamos hoy en día.

FUENTE: http://matesup.utalca.cl/matematica1/web_curso_mat_2007/historia/algebra_historia.htm
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 11:41 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Lección 2: Figuras congruentes o semejantes

Lo que sabes

1. Auxíliate de tus instrumentos de geometría y realiza lo que se indica.

a) Pedro le tomó una fotografía a su bicicleta, la cual se muestra a continuación.

Glosario

Ángulos homólogos. En las figuras semejantes, los lados que se corresponden son lados homólogos. Al lado que ocupa el mismo lugar en otra u otras figuras le llamamos homólogo. En esta situación se refiere a los ángulos.
Símbolos:
Semejanza: ∼
Congruencia: ≅

- Pedro quiere hacer dos dibujos de su bicicleta. Para ello, en una hoja trazará un triángulo $A'B'C'$, cuyos lados homólogos medirán lo mismo que los del triángulo ABC, y en otra hoja un triángulo $A''B''C''$, cuyos lados homólogos midan la mitad. Ayúdale, dibujando en tu cuaderno los triángulos que quiere trazar.
- De los tres triángulos, ¿cuáles son iguales? ______
- ¿Cómo son las medidas de sus lados correspondientes? ______
- ¿Cómo son las amplitudes de los **ángulos homólogos** de estos triángulos? ______
- Cuando su papá vio los dibujos dijo: "Estos triángulos son semejantes". Argumenta por qué es cierta o no esta afirmación. ______
- Agrúpate con otros dos compañeros y escriban cuáles son las condiciones que deben cumplir dos triángulos para ser congruentes; y cuáles, para ser semejantes. ______

b) Si el marco de la fotografía mide 12 cm de largo y 7 cm de ancho, ¿cuáles serán las dimensiones del marco del dibujo que contendrá al triángulo $A''B''C''$? ______

c) Compara tus respuestas con las de otros dos compañeros. En caso de que haya diferencias, argumenten cada una para llegar a una conclusión común.

2. Organizados por su profesor, en una plenaria, discutan: ¿qué condiciones se cumplen para que dos rectángulos sean semejantes y también congruentes?

- Concluyan sobre las condiciones necesarias para afirmar que dos rectángulos son congruentes o semejantes. Escríbanlas en su cuaderno.

Actividades

1. Analicen cada situación y realicen lo que se indica.

Pedro quiere hacer bocetos de bicicletas a partir de triángulos cuyas características se presentan a continuación. Cada uno trace en su cuaderno las propuestas de Pedro y contesten.

a) Un triángulo cuyos ángulos midan 60°.

- Comparen su triángulo con el de su pareja y escriban en qué se parecen y en qué son diferentes. ______

b) Ahora construyan un triángulo cuyos ángulos midan 90°, 45° y 45°.

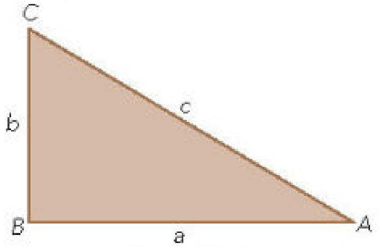
- Comparen el triángulo de cada uno y escriban en qué se parecen y en qué son diferentes. ______

c) Construyan un triángulo cuyos ángulos midan 90°, 60° y 30°.

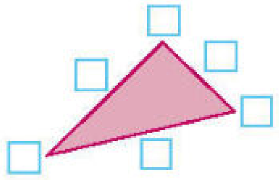
- Nuevamente, comparen el triángulo que hizo cada uno y escriban en qué se parecen y en qué son diferentes. ______

d) Organizados por su profesor, comparen los triángulos trazados por varias parejas y, de manera grupal, argumenten sobre las características de las figuras semejantes. ______

2. Consideren que los siguientes triángulos son semejantes; analícenlos y realicen lo que se pide.



Triángulo 1



Triángulo 2

a) Consideren el triángulo 1 y escriban en los recuadros del triángulo 2 las letras A', B', C' y a', b' y c', según corresponda.

b) Midan los lados de cada triángulo y completen la siguiente tabla.

Triángulo ABC	$a =$	$b =$	$c =$	$\frac{a}{a'} =$	$\frac{b}{b'} =$	$\frac{c}{c'} =$
Triángulo A'B'C'	$a' =$	$b' =$	$c' =$	$\frac{a}{b} =$	$\frac{a'}{b'} =$	

c) Argumenten si los lados del triángulo ABC y $A'B'C'$ son o no proporcionales. ______

d) Organizados por su profesor, mediante una lluvia de ideas, argumenten si los triángulos son o no semejantes. ______

e) ¿Qué relación se observa en los cocientes obtenidos? ______

f) ¿Cómo se le llama a esta relación? ______

g) Orientados por su profesor, determinen qué es el factor de proporcionalidad y su utilidad para obtener figuras semejantes. ______

3. Tracen un par de triángulos cuyos lados tengan las mismas medidas.

   a) Reflexionen y comenten si los triángulos, cuyas longitudes de sus lados homólogos miden lo mismo (congruentes) son o no semejantes.

   b) Orientados por su profesor, escriban en las siguientes líneas una conclusión sobre si dos figuras, cuyos lados miden lo mismo, son o no congruentes. ________________

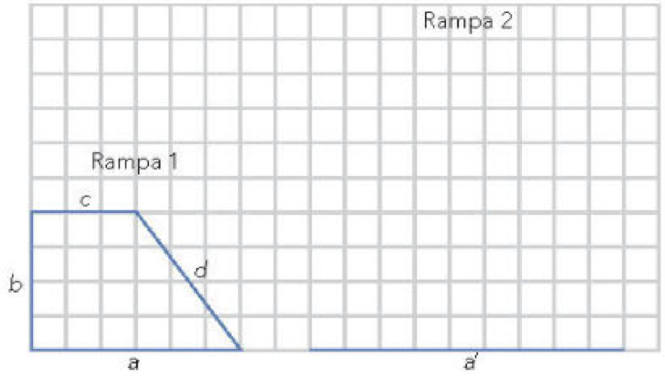
4. Resuelvan el siguiente problema.

   a) En un plano, las dimensiones de una habitación miden 6 cm de largo y 4 cm de ancho. Si en la construcción real a lo largo quedó de 9 m, ¿cuánto mide de ancho la habitación? ________

   b) Expongan al grupo el procedimiento que usaron para encontrar el resultado. En caso de haber diferencias, justifíquenlas.

   c) Escriban en el siguiente recuadro los diferentes procedimientos para hallar la respuesta.

5. En la imagen se muestra el boceto de una rampa que utilizan los jóvenes para patinar. Analícenla y realicen lo que se indica.



   a) Si a y a' son segmentos de longitudes proporcionales, tracen los segmentos b', c' y d' para obtener una figura semejante a la rampa 1.

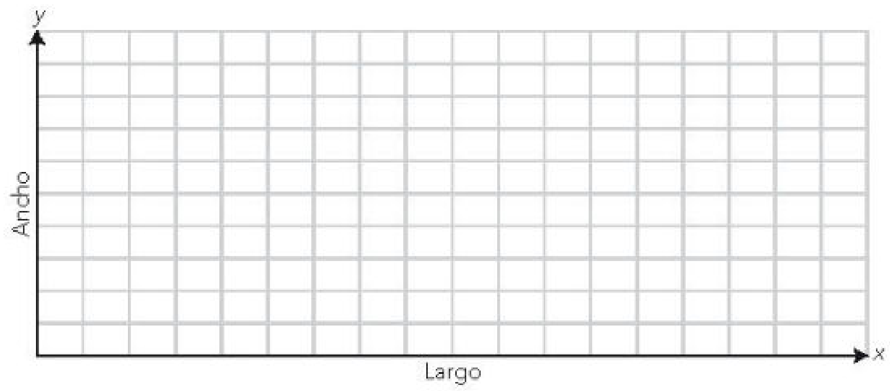
   b) Comparen con otro equipo la figura que trazaron y compartan su respectivo procedimiento. En caso de haber diferencias, argumenten su propia respuesta.

   c) Coordinados por su profesor, presenten ante el grupo procedimientos diferentes para resolver esta situación.

6. Resuelvan el siguiente problema.

   a) Se quiere ampliar una fotografía que mide 2 cm de largo y 1 cm de ancho. Si el lado que mide 2 cm, en la ampliación quedó de 5 cm, ¿cuánto mide de ancho la fotografía amplificada? ________

   b) En el siguiente plano tracen los rectángulos que representan las fotografías.

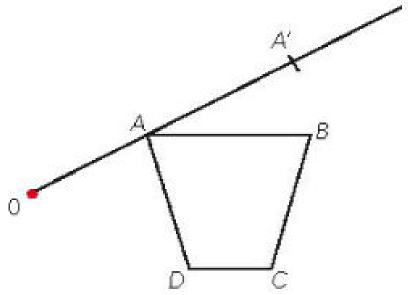


   c) Tracen en su cuaderno dos figuras más que sean semejantes a las dos primeras.

   d) Argumenten por qué son semejantes. ________________

   e) Coordinados por su profesor, en una plenaria, expongan sus justificaciones y anótenlas en su cuaderno.

7. Analicen la siguiente imagen. Utilicen su compás para completarla y contesten lo que se plantea.



   a) Comenten sobre el procedimiento que se siguió para obtener A'.

   b) Comparen los lados homólogos de ambas figuras y determinen el factor de proporcionalidad.

   c) ¿Cómo son los ángulos homólogos entre ambas figuras? ________________

d) Escriban en su cuaderno una conclusión en la que se relacione el factor de proporcionalidad y los ángulos homólogos de dos figuras semejantes.

e) Con la coordinación de su profesor, propongan un polígono y, en una cartulina, tracen una figura semejante siguiendo este procedimiento.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Cuando se conocen tres ángulos, se obtienen triángulos cuyos lados pueden tener diferentes medidas, pero conservan la misma forma, es decir, son triángulos semejantes.

Si la razón entre los lados homólogos de dos triángulos es un valor constante, entonces en este caso también se trata de figuras semejantes.

Cuando dos figuras tienen sus lados homólogos iguales, es decir, tienen la misma forma y el mismo tamaño, entonces son congruentes. La congruencia es un caso especial de la semejanza, dado que la constante de proporcionalidad es igual a uno.

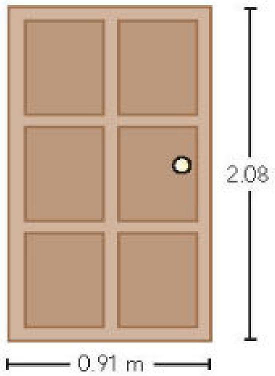
Si dos o más rectángulos están en el mismo plano y los vértices que no están sobre alguno de los ejes, son colineales; entonces los rectángulos son semejantes.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas tomando en cuenta las propiedades de congruencia y de semejanza.

a) A un carpintero le han encargado una repisa rectangular. El cliente le entregó un dibujo en el que el largo mide 15 cm y el ancho 8 cm. Si ha pedido que lo largo mida 100 cm, y que sea semejante al dibujo. ¿Cuánto debe medir de ancho? ______

b) Analiza la imagen y contesta.



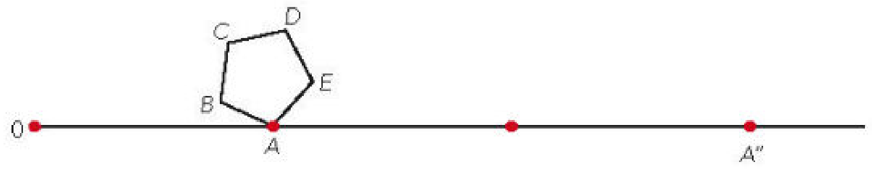
- Si Antonio hace un dibujo en el que la puerta mide 8 cm de altura, ¿cuánto debe medir de ancho?

______

- ¿Cuál es el factor de proporcionalidad? ______
- Propón las medidas de dos rectángulos que sean semejantes a las medidas de la puerta. ______

______

2. Analiza la imagen y realiza lo que se pide.



- Traza el polígono $A'B'C'D'E'$.
- Traza un polígono $A''B''C''D''E''$, de manera que sea semejante a la figura $ABCDE$ y que tenga el doble de tamaño. Toma como referencia A''.
- Determina el factor de proporcionalidad entre cada polígono construido y el polígono original. ______ Realiza en tu cuaderno las operaciones necesarias.
- Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Desafío

1. Analiza la siguiente situación y contesta.

a) Arturo practica deporte con la patineta, cierta ocasión compró unos pósters con las dimensiones que se muestran en las imágenes.

Póster 1

5 cm

8 cm

Póster 2

7.5 cm

12 cm

Póster 3

9 cm

13 cm

Enlázate

Consulta la página de internet: http://www.thatquiz.org/es/. (Consulta: 17 de enero de 2013 a las 11:17 horas.) Haz clic en "triángulos", enseguida en "semejante" y practica calculando los segmentos que permiten que se formen triángulos semejantes.

- ¿Cuáles pósters son semejantes entre sí? ______
- Argumenta tu respuesta. ______

2. Compara tus resultados con los de otros compañeros, y con el apoyo de tu profesor reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Horizonte cultural

Para realizar dibujos semejantes, es decir, de la misma forma, pero de diferente tamaño, el pantógrafo es una herramienta útil y eficaz con la que se pueden realizar.

Pantógrafo es una palabra compuesta por los vocablos griegos *Pan* = todo y *graphein* = descripción, por lo tanto, permite *describir todo*.

El pantógrafo se basa en los principios de Descartes sobre los paralelogramos, fue ideado en 1603 por un sacerdote jesuita alemán llamado Christopher Scheiner. Tiene diversas aplicaciones en la mecánica y la ingeniería, entre otras ramas del saber humano.

El pantógrafo es un instrumento que se utiliza para ampliar o reducir dibujos. Se puede fabricar con varas de plástico, madera, metal o cualquier otro material. Tiene una serie de agujeros organizados de manera que es posible realizar diferentes tipos de ampliación o reducción de dibujos o figuras.

Si tienes posibilidad de conseguir uno, realiza dibujos o figuras geométricas con tus creaciones con los de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las características de semejanza estudiadas en esta lección.

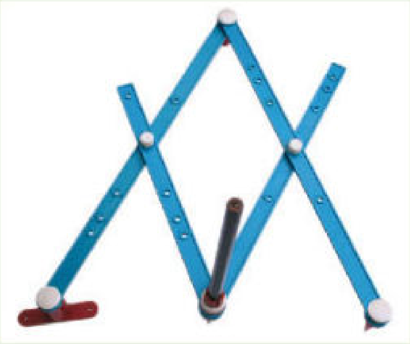


Fig. 1.1. Ejemplo de un pantógrafo de plástico.

Indaga en la siguiente página acerca del uso de los pantógrafos en la arqueología.

FUENTE: González, J. C. y Maestre, W. L., (2012). *¿Pantógrafo o cabri? Artefactos para la conceptualización. Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas*. Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas: Bogotá, D.C. pág. 27. Recuperada de: http://repositorio.pedagogica.edu.co/xmlui/bitstream/handle/123456789/247/TE-15472.pdf?sequence=1.
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 11:46 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Lección 3: Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Lo que sabes

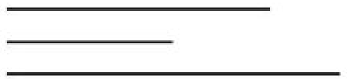
1. Toma como base la congruencia de triángulos para realizar las siguientes actividades y contestar las preguntas.
   a) Considera las medidas que se proponen y en tu cuaderno construye los triángulos que sean posibles. Posteriormente realiza lo que se indica.
   - $AB = 4$ cm; $BC = 5$ cm; $AC = 6$ cm
   - $LM = 2$ cm; $LN = 3$ cm; $MN = 6$ cm
   - $RT = 7$ cm; $TL = 2$ cm; $RL = 7$ cm
   - ¿Con cuál o cuáles de los datos anteriores fue posible trazar un triángulo? ______
   - Argumenta por qué no fue posible trazarlo o trazarlos. ______
   - Escribe las medidas de un triángulo que no se pueda trazar y argumenta por qué no es posible. ______
   - Compara tus respuestas con las de otros compañeros y en caso de haber diferencias, argumenten sobre ellas.

   b) Orientados por su profesor, escriban las condiciones necesarias para que, dadas las longitudes de tres segmentos, se pueda construir un triángulo. ______

Actividades

1. Basándose en los criterios de congruencia de triángulos, analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se pide.

   Ana observó que su hermano intentaba formar un triángulo con tres palillos cuyas dimensiones son como los que se muestran en la imagen.



   a) Cada integrante trace en una hoja en blanco, un triángulo considerando los segmentos anteriores. Recorten y comparen sus triángulos con los de sus compañeros de equipo.
   - ¿El triángulo que construiste es igual al de tus compañeros? ______ Argumenten a qué se debe esto.

- En caso de haber diferencias entre sus triángulos, analicen a qué se deben y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

b) Deduzcan si los triángulos construidos por todos los integrantes del grupo son iguales. ______

¿Por qué? ______

c) Orientados por su profesor, elijan un triángulo de cada equipo. Comparen los triángulos elegidos y reflexionen si su deducción es o no correcta.

- Argumenten si es posible o no trazar dos triángulos diferentes cuando se conocen las medidas de los tres lados. ______
- Con la guía de su profesor, elaboren de manera grupal una conclusión sobre el argumento anterior. Escríbanla en su cuaderno.

2. Realicen lo que se indica y reflexionen sobre lo que se cuestiona.

a) Cada integrante del equipo construya en su cuaderno un triángulo con las siguientes características: segmentos $AB = 7$ cm; $BC = 5$ cm y entre ellos un ángulo de 65°.

- Comparen sus trazos y escriban las características de sus triángulos. ______

b) Intenten construir un triángulo diferente.

- Argumenten por qué fue o no posible su construcción. ______

c) Propongan las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos y construyan, en su cuaderno, un triángulo.

- ¿Cuánto mide el tercer lado del triángulo? ______
- Comparen el segmento homólogo en el triángulo de cada integrante, analicen lo que sucedió y expliquen a qué se debe. ______
- Enuncien una regla que generalice lo que sucede al trazar dos triángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. ______
- Comparen sus enunciados, y orientados por su profesor escriban una conclusión grupal sobre la construcción de triángulos cuando se conoce la longitud de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. ______

3. Dulce tomó un curso de bisutería y desea hacerse unos aretes en forma de triángulo. Para ello cortó un segmento de alambre como el que se muestra en la siguiente imagen, ayuda a Dulce a construir sus aretes, toma en cuenta las siguientes características:

a) Considera L como vértice y traza un ángulo de 65°.

b) A partir de M, traza un ángulo de 50°.

c) Prolonga los rayos de cada ángulo de manera que se intersequen. Al punto de intersección llámale N.

d) Escribe la medida de los segmentos:

e) $LN =$ ______ $MN =$ ______

f) Compara tu triángulo con el de otros tres compañeros y escriban las características de sus triángulos. ______

g) Propón la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. ______

- Traza en tu cuaderno, el triángulo con las medidas propuestas.
- Intercambia las medidas propuestas con las de otro compañero. Realicen el trazo correspondiente y comparen sus construcciones.
- ¿Qué sucedió? ______ ¿A qué se debe? ______
- Argumenten si es posible o no trazar dos triángulos diferentes cuando se conocen las amplitudes de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. ______
- Junto con tu compañero enuncien una regla que generalice esta situación. ______
- Comparen sus enunciados, y orientados por su profesor escriban una conclusión grupal sobre la construcción de triángulos cuando se conoce la amplitud de dos ángulos y la longitud del lado comprendido entre ellos. ______

Actividades

1. En la escuela de Jorge, el profesor de artes hizo un *collage* a base de puros triángulos equiláteros de diferentes tamaños y de diferentes colores. El resultado fue toda una obra de arte. Ahora es su turno; realicen sus propias obras de arte. Cada uno trace en una hoja blanca triángulos equiláteros de diferentes tamaños, decórenlos como ustedes quieran y realicen lo que se indica.

a) Comparen sus triángulos y argumenten por qué son semejantes. ______

b) Calculen la razón entre los lados de estos triángulos. ______

c) Calculen la razón entre sus perímetros. ______

2. Realicen la misma actividad, sólo que ahora tracen un triángulo isósceles cuya amplitud del ángulo, que es diferente a los otros dos, sea de 50°.

a) Comparen sus triángulos y argumenten por qué son o no semejantes. ______

b) ¿Cuál es la razón entre sus lados homólogos? ______

c) Razón entre los perímetros. ______

d) De manera grupal y orientados por su profesor, escriban las condiciones que expliquen cuándo dos triángulos son semejantes. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Criterios de congruencia de triángulos.

Criterio de congruencia (LLL): Si los tres lados de dos triángulos tienen la misma medida, entonces ambos triángulos son congruentes.

Criterio de congruencia (LAL): Dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, siempre se obtendrán triángulos iguales.

Criterio de congruencia (ALA): Dadas las medidas de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, siempre se obtendrán triángulos iguales.

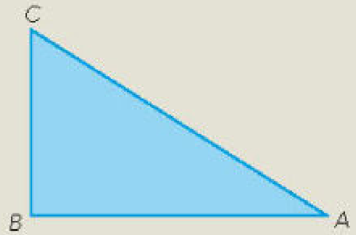
Propiedades de la semejanza.

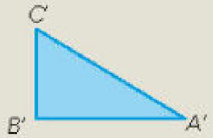
Dos figuras geométricas son semejantes:

Si sus ángulos homólogos son iguales.

Si la razón entre sus lados correspondientes es constante.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$





Lo que aprendí

1. Tomando como base los criterios de congruencia de triángulos, realiza las siguientes actividades.

a) Propón las medidas de los lados de un triángulo. Trázalo y argumenta por qué se cumple el criterio de congruencia *LLL*. ______________________

b) Propón las medidas de dos lados y un ángulo comprendido entre ellos. Traza el triángulo correspondiente y argumenta por qué se cumple el criterio de congruencia *LAL*. ______________________

c) Propón las medidas de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. Traza el triángulo correspondiente y argumenta por qué cumple el criterio de congruencia *ALA*. ______________________

d) Escribe tus conclusiones acerca de los criterios de congruencia de triángulos.

- Criterio *LLL*. ______________________
- Criterio *LAL*. ______________________
- Criterio *ALA*. ______________________

2. Realiza en tu cuaderno los trazos y completa lo que se pide.

a) Traza dos triángulos cuyos lados homólogos sean diferentes, pero cuyos ángulos sean de 60°, 45° y 75°.

- Calcula la razón entre sus lados homólogos. ______________________
- Calcula la razón entre sus perímetros. ______________________
- Argumenta por qué son semejantes. ______________________

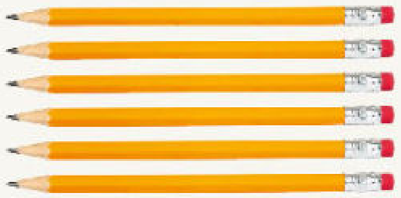
b) Coordinados por su profesor, en una plenaria, comparen sus respuestas y en caso de haber diferencias, reflexionen sobre ellas.

Enlázate

Para complementar lo aprendido en esta lección, puedes visitar las siguientes páginas, donde encontrarás más información sobre los criterios de congruencia de triángulos. http://tutormatematicas.com/GEO/Triangulos_congruentes_LLL_LAL_ALA_AAL_CC_HC_HA_CA.html http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Triangulos_congruencia.html. (Consulta: 15 de enero de 2013 a las 21:00 horas.)

Desafío

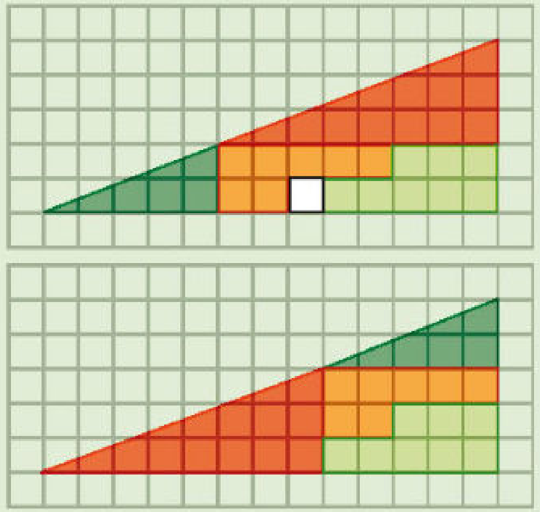
1. Consigan seis lápices como los de la imagen y formen cuatro triángulos congruentes.



2. Comparen su actividad con la de otra pareja y justifíquenla.

Horizonte cultural

1. Traza en tu cuaderno dos triángulos congruentes al que se muestra en la imagen.



a) Calcula el área de este triángulo considerando cada cuadrito como una unidad.

b) Recorta el segundo triángulo en cuatro partes de acuerdo con los colores de la imagen.

c) Acomoda las piezas como se muestra en la primera imagen. ¿Por qué falta un cuadrado?

2. Para que amplíes tu horizonte cultural, indaga en la siguiente página la explicación de esta situación, y junto con su profesor reflexionen sobre la misma.

Fuente: http://www2.uah.es/vivatacademia/anteriores/veintiocho/curiosidades.htm. (Consulta: 16 de enero de 2013 a las 23:30 horas.)

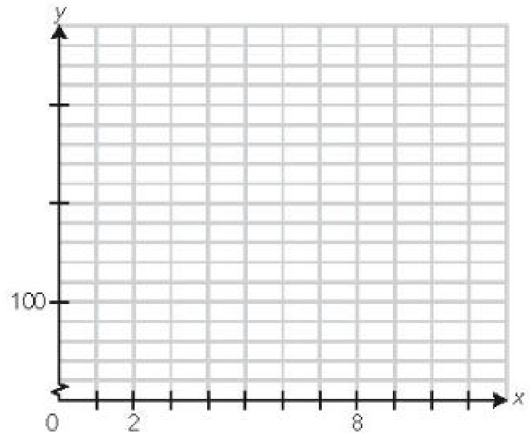
Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Lección 4: Tablas y gráficas de relaciones proporcionales

Lo que sabes

1. Una compañía de taxis proporciona el servicio de entrega de paquetería. Ésta modela algebraicamente con la expresión $y = 20x + 10$, lo que tiene que cobrar por cada servicio; x representa la cantidad de kilómetros. ¿Cuánto se deberá cobrar, respectivamente, por un servicio de 3, 5, 7, 8, y 10 km?

a) Completa la tabla y construye la gráfica.



Kilómetros	Pesos
1	30
3	
5	
7	
8	
10	

b) Contesta las siguientes preguntas.

- ¿De qué depende el costo del servicio? ____
- ¿Cuál es la variable independiente de esta situación? ____
- ¿Cuál es la variable dependiente? ____
- ¿Cuánto se cobra por cada kilómetro de servicio? ____
- ¿Qué significado tiene el número 20 en la expresión algebraica? ____
- ¿De qué otra manera puede resolverse ésta situación? ____
- ¿En qué otra asignatura empleas tablas y gráficas? ____
- Argumenta si hay o no una proporción directa entre el costo del servicio y los kilómetros del recorrido. ____

c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen en aquellas en las que hayan tenido diferencias.

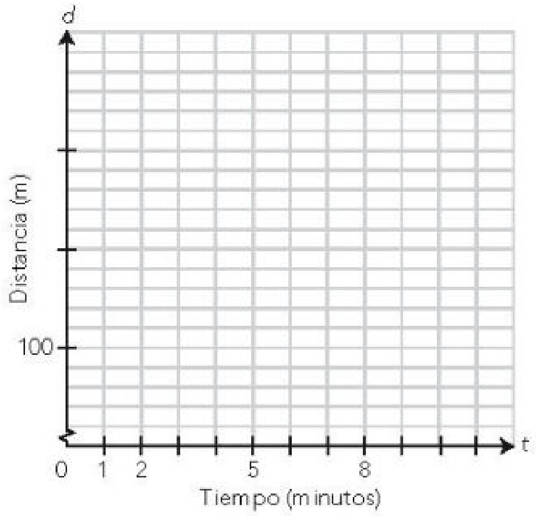
d) Con la ayuda de su profesor, concluyan sobre cómo se tabula y se grafica una expresión como la que modela la situación del taxi.

Actividades

1. Reúnanse en equipos de tres, analicen y resuelvan la siguiente situación.

El profesor de educación física está entrenando a tres velocistas: Luisa corre 50 m por minuto y la colocó a 20 metros de la línea de salida. Federico corre, en medio minuto, 80 m y está a 10 m de la línea de salida. Bernabé está justo en la línea de salida; él corre 60 m cada 60 segundos. Si la pista tiene 1500 m, ¿quién llegará primero a la meta? ______

a) Completen la tabla y construyan una sola gráfica.



Tiempo (minutos)	Distancia recorrida (m)		
	Luisa	Federico	Bernabé
0			
1			
5			
8			
10			

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la distancia por minutos que recorre cada uno de ellos?

- Luisa. ______
- Federico. ______
- Bernabé. ______

c) Comparen la recta de Bernabé con la de Luisa y la de Federico. ¿Qué diferencias encuentran? ______

d) La recta de Bernabé modela una proporción directa, mientras que las otras dos modelan una relación lineal. ¿Cuáles son las características para que se considere que en una recta hay una relación de proporcionalidad? ______

e) Expliquen si la relación entre estas dos magnitudes (distancia-tiempo) de esta situación, es o no proporcional. ______

f) ¿Qué diferencia existe en la gráfica de una relación lineal y una relación de proporcionalidad? ______

g) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y justifíquenlas. De manera grupal reflexionen sobre las características que tiene la gráfica de dos cantidades cuando se relacionan proporcionalmente. Con la orientación de su profesor escriban sus conclusiones. ______

2. De acuerdo con las características que presenta una gráfica de relación proporcional, analicen la siguiente situación y contesten las preguntas.

Cuatro compañías telefónicas colocaron en su respectivo anuncio publicitario la tabla que corresponde al servicio que prestan.

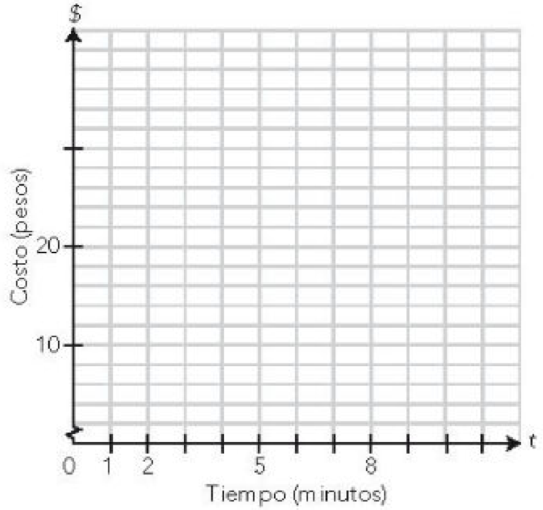
a) Con la información de cada una de ellas construyan en el siguiente plano la gráfica correspondiente.

La compañía "Habla más"			
Tiempo (minutos)	1	5	10
Costo (pesos)	2.50	12.50	25.00

La compañía "A toda voz"			
Tiempo (minutos)	1	5	10
Costo (pesos)	20	20	20

La compañía "Más alto"			
Tiempo (minutos)	2	5	10
Costo (pesos)	3	7.50	15

La compañía "Desde lejos"			
Tiempo (minutos)	2	5	10
Costo (pesos)	7	16	31



Glosario

Constante de proporción. Es el cociente entre el antecedente y el consecuente de cualquier razón de una proporción.

Si el cociente que se obtiene de dividir costo entre el tiempo para cada par de magnitudes es siempre el mismo, le llamaremos **constante de proporción**. ¿Cuál es la constante de proporción para cada compañía?

- La compañía "Habla más": ______
- La compañía "A toda voz": ______
- La compañía "Desde lejos": ______
- La compañía "Más alto": ______

b) ¿Qué relación existe entre la constante de proporción y la recta que se traza al graficar los valores de la tabla? __________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la relación costo-tiempo de cada una de las cuatro compañías?

- La compañía "Habla más": __________
- La compañía "A toda voz": __________
- La compañía "Desde lejos": __________
- La compañía "Más alto": __________

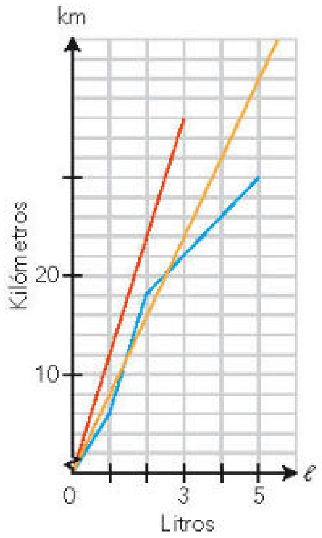
d) ¿En cuál de estas compañías no existe una relación proporcional? __________

e) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Justifíquenlas, y con ayuda del profesor concluyan sobre cómo determinar si dos magnitudes diferentes se relacionan proporcionalmente, tomando en cuenta su tabulación (tabla). Escriban su conclusión. __________

3. Tomando como base el modelado de la relación proporcional presentado en las gráficas y tablas anteriores, analicen la siguiente situación y realicen lo que se pide.

Ernesto desea adquirir un automóvil, para lo cual ha decidido realizar un estudio sobre el rendimiento de tres modelos, es decir, analizará la cantidad de kilómetros que recorre un auto por cada litro de gasolina que consume su motor. Él representó en la siguiente gráfica los resultados de su estudio.

a) Completa la tabla y contesta las preguntas.



Litros	Kilómetros		
	Auto 1	Auto 2	Auto 3
1			
2			
3			
4			
5			

Auto 1
Auto 2
Auto 3

b) Comparen sus tablas con las de otros equipos. Reflexionen sobre las diferencias encontradas y contesten.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la relación litros-kilómetros para el auto 1? __________
- Y, ¿cuál para el auto 2? __________
- ¿En cuál de los automóviles la relación litros-kilómetros es proporcional? __________
- ¿Cuál de los automóviles le conviene comprar? ______ ¿Por qué? __________

c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Justifíquenlas, y con ayuda del profesor concluyan sobre cómo determinar si dos magnitudes se relacionan proporcionalmente al analizar su gráfica. Anoten su conclusión. __________

4. Analicen y resuelvan la siguiente situación, si es posible, empleen la calculadora para realizar las operaciones.

En las tres embotelladoras de agua que hay en la colonia la Tolva, están los siguientes letreros de los precios de sus respectivos productos.

"La gota completa":
Botella $\frac{1}{2}$ ℓ $6.0;
garrafón de 5 ℓ $40.00;
botella 1 ℓ $8.00 y
botella $\frac{1}{4}$ ℓ $3.00

"La gran gota":
Botella 1 ℓ $9.00;
botella $\frac{1}{2}$ ℓ $4.50, botella
$\frac{1}{4}$ ℓ $2.25; garrafón de
5 ℓ $45.00

"La gota gorda":
Botella 1 ℓ $9.00;
botella $\frac{1}{2}$ ℓ $4.50, botella
$\frac{1}{4}$ L $2.25; garrafón de
5 ℓ $45.00

a) De acuerdo con la información de cada letrero, contesta.

- ¿En cuál de los tres negocios todos los precios son proporcionales a la cantidad de agua? __________
- ¿Y en cuál sólo algunos precios son proporcionales a la cantidad de agua? __________
- ¿En cuál negocio el precio de un litro de agua es proporcional al precio de un garrafón de 5 litros? __________

b) Al graficar en el plano cartesiano la relación litros-precio de cada negocio, ¿cuál de las gráficas mostraría una línea recta? __________

c) Si los precios de las tres embotelladoras fueran proporcionales a la cantidad de agua, ¿cuál sería la expresión algebraica que modele la relación litros-precio a partir del precio unitario en cada una de ellas?

- "La gota completa": __________
- "La gran gota": __________
- "La gota gorda": __________

d) Comparen sus respuestas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Por último, comuníquenlas al grupo.

Notas importantes

Lee las siguientes notas para complementar tus ideas.

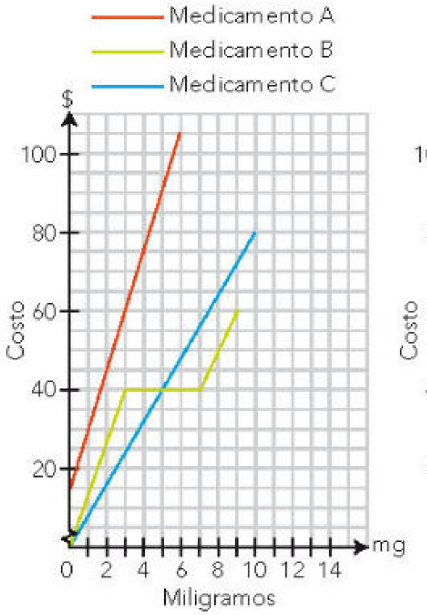
Dos magnitudes se relacionan proporcionalmente si:

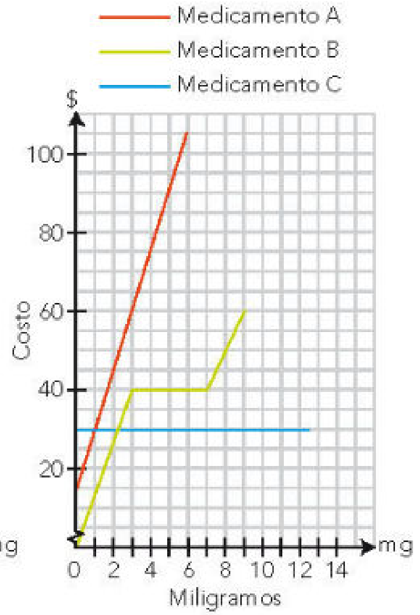
- Al analizar su tabulación, existe una constante de proporción, es decir, que al dividir un par cualquiera de datos, el cociente y el residuo (en caso de que haya) son los mismos.
- La gráfica es una línea recta que pasa por el origen.
- La expresión algebraica que la modela es de la forma: $y = mx$; o bien $y = kx$

Lo que aprendí

1. Andrés es un farmacéutico y quiere analizar el precio de cada miligramo de cierta sustancia que es vendida por tres compañías diferentes. Para no colocar las marcas, sólo las etiquetó como "Medicamento A, B y C", respectivamente. Analiza la siguiente gráfica, completa la tabla de la relación que sí es proporcional, y contesta las preguntas.

Medicamento ____	
Miligramos	Costo





a) ¿Cuál es la constante de proporción del medicamento donde la relación miligramos-costo es proporcional?

____

b) ¿Cuál es la expresión que la modela? _______________

c) Explica por qué dos de los medicamentos graficados no presentan una proporción entre sus magnitudes.

____

2. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Junto con su profesor reflexionen sobre las diferencias que hayan obtenido.

Desafío

1. Analiza la siguiente imagen.

a) ¿En cuál de estas dos papelerías la relación libretas-precio es proporcional? _______________

b) Organizados por su profesor, expongan las diferentes maneras de cómo se pudo resolver este problema y concluyan sobre cuáles son los elementos que coinciden en cada resolución.

Enlázate

1. En una hoja de cálculo realiza lo siguiente.

a) En la celda A1 *metros cuadrados* B1 escribe *Albañil A*; en B2 la fórmula = A2*50 + 20; en la C1 *Albañil B* y en C2 = A2*65. (Véase figura 1).

b) De las celdas A2 hasta A7, escribe los números 1, 2, 3, etcétera y copia las celdas B2 y C2, hasta las celdas B7 y C7. (Véase figura 2).

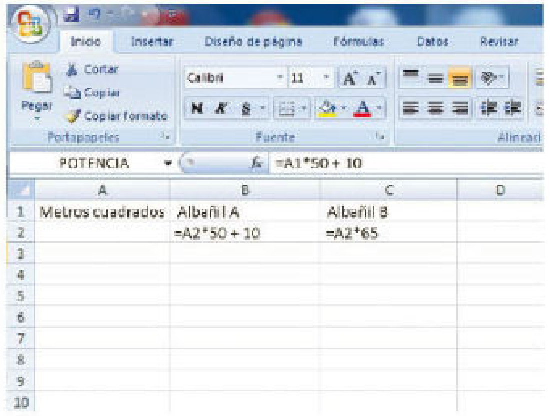


Figura 1

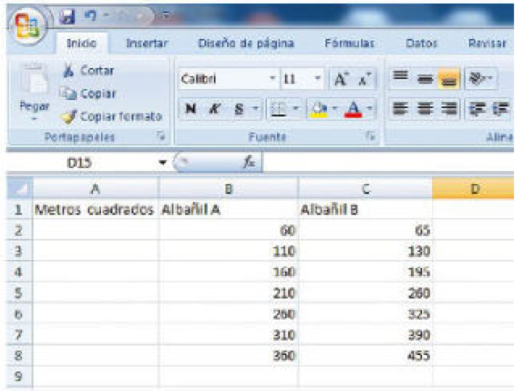


Figura 2

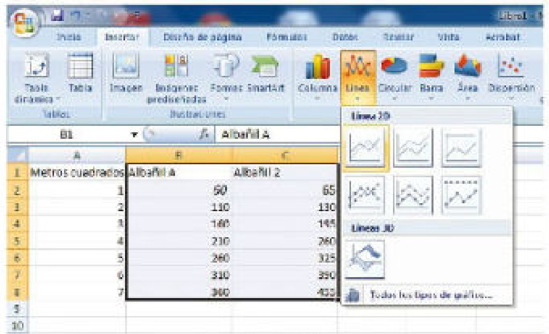


Figura 3

c) Selecciona las celdas B1 hasta C8 y busca la ventana *Insertar*. Luego elige el icono de *Línea* y después elige cualquiera de los seis primeros recuadros. (Véase figura 3).

d) ¿Cómo son las rectas que se trazaron en la gráfica?

____

e) Expliquen si las relaciones que se muestran con datos de los albañiles A y B son o no proporcionales.

____

f) Investiga en qué otros *software* es posible graficar este tipo de información.

g) ¿En qué otras situaciones puede servir graficar información empleando un *software*?

____

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros, y orientados por el profesor concluyan sobre la utilidad de este contenido en su vida diaria.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

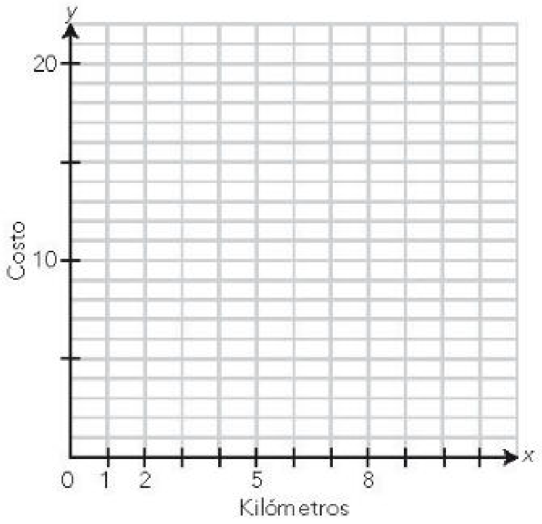
Lección 5: Tablas de relaciones cuadráticas

Lo que sabes

1. Resuelve el siguiente problema, construyendo la tabulación y la gráfica correspondiente. Contesta las preguntas.

   Los taxis tienen como cuota \$5 por el "banderazo" (que consiste en cobrar pasaje sin recorrer distancia alguna), más \$1.50 por kilómetro recorrido. Emmanuel tomó su taxi en el kilómetro 14 de la carretera hacia el Desierto de los Leones y se bajó en el kilómetro 25.

Kilómetros	Costo
3	
4	
7	
8	
11	



   a) ¿Cuánto debió pagar al finalizar su viaje? ____________

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el costo del viaje? ____________

   c) ¿Qué nombre recibe la relación que guardan las magnitudes kilómetro-costo? ____________

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros, justifícalas, y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Actividades

1. Analicen cada una de las siguientes situaciones completando la tabla correspondiente y contesten las preguntas.

   a) Sara fue al negocio de serigrafía "La estampa" y preguntó por el precio de una lona cuadrada de 4 m². El dueño contestó que cobraría \$210, y por otra de 9 m² cobraría \$460. ¿Cuál es el costo de una lona cuadrada de 1, 4, 5, 7 y 10 m por lado? (Completen la tabla).

Metros	Metros cuadrados	Costo en pesos
1		
	4	\$ 210
	9	\$ 460
4		
5		
7		
10		

   - ¿Cuál es el costo de 1 m² de lona? ____________
   - ¿Cómo obtuvieron el costo de cada una de las lonas de la tabla? ____________
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el costo de cualquier lona? ____________
   - Comparen sus respuestas con otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Expónganlas frente al grupo.

   b) En una plaza en construcción están en preventa diferentes locales. Éstos tienen como característica que de largo miden un metro más que de ancho y el costo por metro cuadrado es de \$800. ¿Cuánto costará un local cuyo ancho mide 2, 3, 5 y *x* metros?

Ancho	Largo	Área del local	Costo
2			
3			
5			
x			

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área del local? ____________
   - ¿Cuál es la expresión algébrica que modela el costo del local? ____________
   - Comparen sus respuestas con las de otras parejas y justifíquenlas. Expongan frente al grupo aquellos procedimientos que fueron diferentes, y con ayuda de su profesor determinen aquel que sea más práctico.

2. Analicen el siguiente problema de caída libre.

   Para determinar la distancia recorrida por un objeto en caída libre, se emplea la siguiente fórmula:

$$d = \frac{gt^2}{2}$$

   Donde:

   d = distancia

   t = tiempo

   $g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$

a) Eduardo vive en el departamento de un edificio; hoy olvido su llave. Al tocar el timbre, su hermana Adriana, le deja caer la llave desde la ventana, que se encuentra a una determinada altura. La llave tardó 5 segundos en llegar al piso, ¿cuál es la distancia que recorrió en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos? (Completa la tabla)

Tiempo (segundos)	Distancia recorrida (metros)
1	
2	
3	
4	
5	

- ¿Cómo determinaron cada uno de los resultados de la tabla?
- ¿Cuál será otra forma de determinar los resultados de la tabla?
- Comparen sus procedimientos con los de otras parejas. Justifiquen que sean correctos y escriban aquellos que sean diferentes a los de ustedes.

b) ¿Cuáles son las similitudes entre el problema de la lona, el del local y este de física?

3. Analicen y resuelvan el siguiente problema de aceleración.

Para las pruebas de velocidad de un automóvil, el ingeniero espera que se alcance una velocidad de 3 metros por segundo y que acelere a una razón de 10 . El ingeniero y su asistente registran la distancia que recorre a 2, 3, 7 y 8 segundos.

El ingeniero emplea la fórmula: $y = \frac{10t^2}{2} + 3t$

Y el asistente, emplea: $y = t(5t + 3)$

Donde:

y = representa la distancia final.

t = representa el tiempo en minutos.

a) Completen la tabla y contesten las preguntas.

Tiempo (min)	Distancia recorrida (m)	
	Ingeniero	Asistente
2		
3		
7		
8		

- ¿Cuáles son las diferencias entre lo registrado por el ingeniero y el asistente?
- ¿Piensan que hay alguna otra forma de obtener los resultados de la tabla?
- ¿Cuál es esa forma?
- ¿Qué diferencia encuentran entre la fórmula empleada por el asistente y la utilizada por el ingeniero?

4. De acuerdo con la resolución de los problemas de las actividades anteriores, respondan cada una de las siguientes preguntas.

a) ¿Qué diferencia encuentran entre la variación de estos cuatro problemas y la del taxi?

b) A las relaciones de estos cuatro problemas se les conoce como variación cuadrática. ¿Por qué piensan que recibe este nombre?

c) Describan las características que tienen las expresiones que corresponden a una variación cuadrática.

d) Comparen sus respuestas con los otros equipos. Justifíquenlas y reflexionen sobre las características que tiene una variación cuadrática, y junto con su profesor escríbanlas.

5. Investiguen sobre algún otro fenómeno de la física o la economía que tenga una variación cuadrática. Expónganlo frente al grupo y, con la orientación de su profesor, hagan una lista de aquellos problemas que verdaderamente sean de variación cuadrática.

Notas importantes

Considera la siguiente información.

Las relaciones con variación cuadrática se presentan en la física, la economía, en algunas otras disciplinas y en una gran infinidad de situaciones de la vida cotidiana. Estas variaciones cuadráticas tienen como características:

- La variable dependiente se obtiene elevando al cuadrado la variable independiente.
- Son de la forma: $y = ax^2$; $y = ax^2 + bx$; $y = ax^2 + bx + c$.
- Y se obtienen de expresiones como: $x(bx + c)$; $(x + a)(x - a)$; $(x + a)^2$ o $(x + b)(x - c)$

Lo que aprendí

1. Tomando como base las características de las relaciones cuadráticas, resuelve el siguiente problema.

   a) Una fábrica de envases tiene diversos productos para sus proveedores. Todos ellos tienen una altura de 30 cm, y la base es circular. ¿Cuál es la capacidad en mililitros de sus envases, cuyo radio es 3, 5, 8 y 10 cm, respectivamente? (Completa la tabla).

Radio (cm)	Capacidad (ml)
3	
5	
8	
10	

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la capacidad de los envases de esta empresa?
   - Compara tu respuesta con la de otros compañeros y justifiquen que sea correcta, sabiendo que el envase de 15 cm de radio tiene una capacidad de 21 195 ml. Con la orientación de su profesor, valoren si su resultado es o no correcto.

2. Un albañil cobró \$730 por colocar la loseta a la sala cuya superficie es cuadrada y mide 3 metros por lado; por la loseta de la cocina (2 m por lado) cobró \$380.
   - ¿Cuánto cobrará por el comedor (4 metros por lado)?
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela está situación?
   - Compara tus respuestas con las de otro compañero y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la orientación de su profesor, analicen los procedimientos empleados y elijan aquel que sea más práctico.

Desafío

1. Resuelve el siguiente problema.

   Roberto vendió dos de de los cuatro terrenos que tenía. Uno en \$70 000 y otro en \$220 000. El primero tiene una longitud de 10 m por lado y el segundo 20 m por lado. ¿Cuál será el precio de un terreno cuadrado de 25 m por lado?

   Compara tus respuestas con las de otro compañero. Con la orientación de su profesor comuniquen sus resultados al grupo y analicen aquellos procedimientos diferentes al suyo. Para concluir, determinen cuál de ellos es el más práctico.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Lección 6: Eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes

Lo que sabes

1. Resuelve los siguientes problemas.

   a) Para elegir al azar al representante de los alumnos de tercer grado, hay como candidatos: 20 alumnos de 3° "A", 9 del grupo "B" y 16 del 3° "C". ¿De cuál grupo es más probable que sea escogido el representante?

   b) Al lanzar dos dados, Ana dice que la suma de los puntos de los dos dados será 9, Lucía dice que será 8 y Benito que será 12. Alberto les dice que el ganador se llevará una paleta.
   - ¿Quién de los tres tiene solo $\frac{1}{36}$ de posibilidades de ganar la paleta?
   - ¿Cuáles son las posibilidades de que gane Lucía?

2. Contesta las preguntas siguientes.

   a) ¿Qué es un evento probabilístico?

   b) ¿A qué se le llama espacio muestral?

   c) ¿A qué se le llama casos favorables de un evento?

   d) ¿Qué es un experimento aleatorio?

3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Junto con su profesor reflexionen sobre las respuestas que sean diferentes y concluyan sobre los conceptos de *evento*, *experimento aleatorio* y *espacio muestral*. Escríbanlos.

Actividades

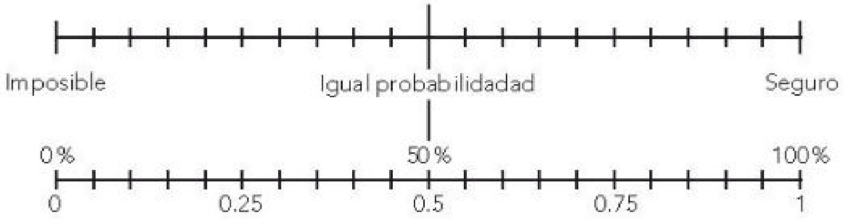
1. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se indica en cada inciso.

a) Completen la siguiente tabla que representa el espacio muestral de la suma de los puntos al lanzar dos dados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2					
2		4		6		
3	4				8	
4			7			10
5						
6						

b) Analicen la escala de la probabilidad y la recta numérica. Contesten las preguntas.

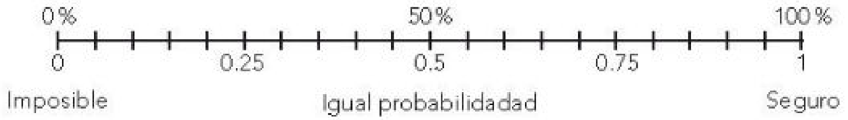
Escala de la probabilidad



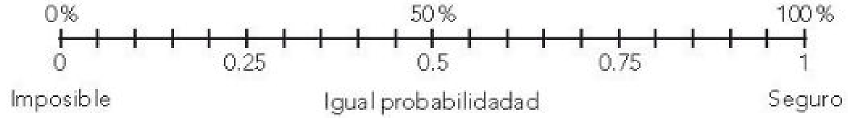
- ¿Cómo se puede representar el 25% como decimal? ______
- ¿Por qué el 100% se representa en la recta como 1? ______
- ¿Por qué piensan que el 100% implica que un evento sea "seguro" como resultado de un experimento de azar? ______
- Cuando al dividir los casos favorables entre el espacio muestral, ¿cómo justificarían que este evento es "imposible" que resulte? ______
- ¿Cómo se puede justificar que el 50% representa "igual probabilidad" de que ocurra o no cierto evento? ______
- De acuerdo con la escala de la probabilidad, ¿cómo etiquetarían la ocurrencia de un evento si tiene el 75% de probabilidad? ______
- Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre la relación que existe entre un porcentaje, un decimal y la escala de la probabilidad.

c) Determinen la probabilidad de cada evento de acuerdo con la tabla anterior y ubiquen el resultado en la recta y en la escala de probabilidad.

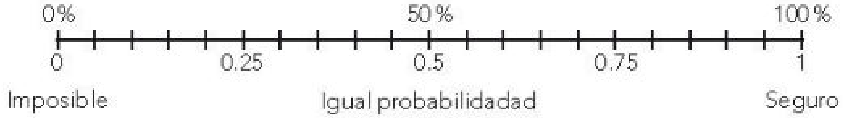
- Que la suma sea 7. Eventos favorables. ______ Espacio muestral. ______
  Probabilidad. ______



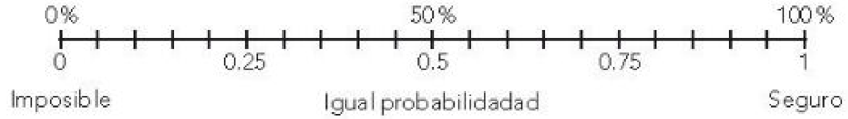
- Que la suma sea mayor a 8. Eventos favorables. ______ Espacio muestral. ______
  Probabilidad. ______



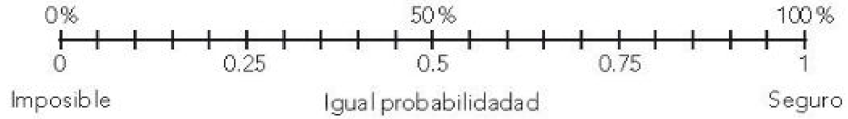
- Que la suma sea un número par. Eventos favorables. ______ Espacio muestral. ______
  Probabilidad. ______



- Que la suma sea 1. Eventos favorables. ______ Espacio muestral. ______
  Probabilidad. ______



- Que la suma sea cualquier número. Eventos favorables. ______ Espacio muestral. ______
  Probabilidad. ______



- ¿De qué otra manera podrían estar graduadas las rectas anteriores? ______

d) Comparen sus respuestas con las de otras parejas, evalúen que sean correctas y reflexionen sobre la utilidad que tiene ubicar en la recta numérica la probabilidad de un evento. Con la orientación de su profesor, concluyan sobre cómo determinar si un evento es o no probable, empleando la escala de la probabilidad. Escriban sus conclusiones. ______

Actividades

1. De acuerdo con la tabla del experimento de lanzar dos dados, escriban cada una de las combinaciones de los dados y la cantidad de casos favorables para cada evento.
   a) Evento A: que la suma sea 8.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   b) Evento B: que la suma sea un número impar mayor de 6.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   c) Evento C: que la suma sea un número mayor a 9.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   d) Evento D: que la suma sea un número menor o igual a 4.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   e) Evento E: que la suma sea un múltiplo de 5.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   f) Evento F: que caiga el mismo número de puntos en ambos dados.
   Combinaciones posibles. ______ Casos favorables. ______
   g) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y justifiquen que sean correctas.

2. De acuerdo con la información anterior, analicen las siguientes afirmaciones y contesten las preguntas.
   a) Los eventos A y B son eventos mutuamente excluyentes.
   - ¿Hay alguna combinación de resultados del evento A que esté en las combinaciones del evento B? ______
   - Argumenten por qué los eventos A y B tienen o no la misma cantidad de casos favorables. ______

   b) Los eventos B y C no son eventos mutuamente excluyentes.
   - ¿Hay alguna combinación de resultados del evento B que esté en las combinaciones del evento C? ______
   - Argumenten por qué los eventos B y C tienen o no la misma cantidad de casos favorables. ______

   c) Los eventos D y F no son eventos mutuamente excluyentes.
   - ¿Hay alguna combinación de resultados del evento D que esté en las combinaciones del evento F? ______
   - Argumenten por qué los eventos D y F tienen o no la misma cantidad de casos favorables. ______

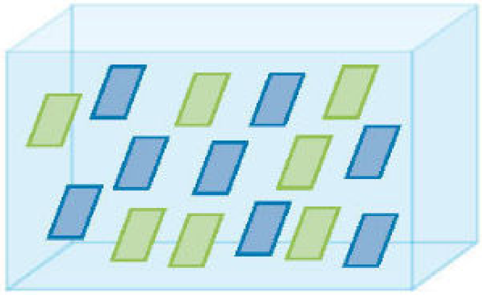
   d) Los eventos B y E son eventos mutuamente excluyentes.
   - ¿Hay alguna combinación de resultados del evento E que esté en las combinaciones del evento B? ______
   - Argumenten por qué los eventos B y E tienen o no la misma cantidad de casos favorables. ______

- Comparen sus respuestas, justifíquenlas, reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la orientación de su profesor, determinen que sean correctas, y contesten las siguientes preguntas.
- ¿Cómo podemos determinar sí dos eventos son mutuamente excluyentes? ______
- ¿Cómo determinamos si dos eventos no son mutuamente excluyentes? ______
- Argumenten si los eventos A y F son o no mutuamente excluyentes. ______
- Escriban en su cuaderno dos eventos que sean mutuamente excluyentes.

3. De manera grupal, comparen sus respuestas, confronten sus ideas, y con la ayuda de su profesor concluyan sobre las características que deben tener dos eventos para que sean mutuamente excluyentes. Escriban en el cuaderno su conclusión.

Actividades

1. Analicen cada una de las siguientes situaciones y contesten las preguntas.
   a) En una urna se introdujeron 15 tarjetas como se muestra en la imagen. El experimento consiste en extraer una tarjeta de la urna.



   - ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? ______
   - ¿Cuántos casos favorables tiene el evento A: extraer una tarjeta de color verde? ______
   - ¿Cuántos casos favorables tiene el evento B: extraer una tarjeta de color azul? ______
   - ¿Es correcto decir que los eventos A y B, son eventos complementarios? ¿Cuáles son las condiciones de estos eventos para que sean complementarios? ______

   b) Se lanza un dado.
   - ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? ______
   - ¿Cuáles son los casos favorables del evento A: que caiga un número par? ______
   - ¿Cuáles son los casos favorables del evento B: que caiga un número impar? ______
   - ¿Cuáles son los casos favorables del evento C: que caiga un número mayor a 4? ______
   - ¿Cuáles son los casos favorables del evento D: que caiga un número menor o igual a 4? ______
   - Es correcto decir que los eventos A y B son complementarios, así como también los son los eventos C y D. ¿Cuáles son las condiciones de estos eventos para que sean complementarios? ______

- Los eventos A y C, no se pueden considerar complementarios, ni los eventos A y D; tampoco los eventos B y D. ¿Cuáles son las condiciones de estos eventos para que no sean complementarios?

- Comparen sus respuestas, justifíquenlas, reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado y, con la orientación de su profesor, determinen que sean correctas. Por último, contesten las siguientes preguntas.
- ¿Cuándo dos eventos son complementarios?
- ¿Cómo se puede determinar si dos eventos son o no complementarios?

- Planteen dos eventos que sean complementarios.

- Comparen sus respuestas. De manera grupal, reflexionen sobre cuándo dos eventos son complementarios. Con la orientación de su profesor, escriban en el cuaderno sus conclusiones.

2. Analiza el siguiente experimento aleatorio y contesta las preguntas.

Jorge introdujo en una urna algunas esferas. Él va a realizar con sus amigos, el experimento de extraerlas de la caja, el ganador lo acompañará al cine.

a) Andrés propuso el evento: extraer de la caja un número mayor a 10. Noemí propuso: extraer de la caja un número múltiplo de 5. Ambos afirman que sus eventos son complementarios. Expliquen si la afirmación de ellos es o no correcta.

b) Jorge propone el evento: extraer un número mayor o igual a 9. Si Lucía quiere proponer un evento que sea complementario al de Jorge, ¿cuál es el evento que debe proponer?

c) Adriana quiere proponer un evento que respectivamente sea complemento de: extraer un número que sea múltiplo de 7 y de extraer un número que no sea impar. ¿Cuáles son los eventos que ella debe plantear?

d) Compara tus respuestas con las de otros compañeros, analícenlas y, con la ayuda de su profesor, evalúen que sean correctas.

3. Planteen una situación que cumpla las siguientes características: de tres eventos, dos son mutuamente excluyentes. El tercer evento es complementario a cualquiera de los anteriores.

a) Intercambien su situación con la de otro equipo y en su cuaderno contesten las siguientes preguntas.
- Del problema que planteó el otro equipo, ¿cuáles son los eventos mutuamente excluyentes?
- ¿Cuáles son los eventos complementarios?

b) Elijan una de las situaciones planteadas, escríbanla en el pizarrón, contesten las preguntas anteriores y, con la ayuda de su profesor, justifiquen que sean correctas.

Actividades

1. Realicen lo que se les pide en cada inciso y contesten las preguntas.

a) Realicen 5 "volados" para los siguientes eventos. Sobre las líneas, registren los resultados.

Evento A: que caiga águila

Evento B: que caiga sol

- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento A en el primer volado?
- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento A en el segundo volado?
- ¿Y en el tercer volado?
- Si en el primer volado cae sol, este resultado implica que en el segundo volado caiga águila.

  Expliquen por qué
- ¿El resultado del primer volado influirá en el del segundo?

  Expliquen por qué

b) Lancen varias veces un dado para determinar los siguientes eventos y registren sus resultados.

Evento A: Que caiga un número mayor a 4.

Evento B: Que caiga un número par.

Evento C: Que caiga un número menor a 3.

- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento A en el primer lanzamiento?
- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento A en el segundo lanzamiento?
- ¿Y en el tercer evento?
- Expliquen por qué el resultado del primer lanzamiento influye o no en el resultado del segundo lanzamiento.

c) Enumeren veinte papelitos del mismo tamaño e introdúzcanlos en una bolsa negra, de modo que no se vean. Realicen el experimento para determinar los siguientes eventos:

Evento A: Extraer de la bolsa un papelito con un número mayor a 11 y menor a 18.

Evento B: Extraer de la bolsa un papelito con un número impar.

Hagan tres extracciones, pero siempre regresen el papelito a la bolsa antes de extraer otro. Registren sus resultados.

_______________ _______________ _______________

- ¿Cuál es el espacio muestral al realizar la primera extracción? _______________
- ¿Cuál es el espacio muestral al realizar la segunda extracción? _______________
- ¿Y al realizar la tercera? _______________
- Expliquen por qué el resultado de la primera extracción cambia o no el resultado de la segunda extracción.

____

- En una bolsa coloquen nuevamente los 20 papelitos y hagan tres extracciones sin remplazo, es decir, sin devolver el papelito a la bolsa.

  Evento A: que la primera extracción sea un número par.

  Evento B: que la segunda extracción sea un número mayor a 10.

  Evento C: que la tercera extracción sea un número múltiplo de 3.
- ¿Cuántos y cuáles son los casos favorables del evento A? _______________
- ¿Cuántos y cuáles son los casos favorables del evento B? _______________
- ¿Y cuántos y cuáles del tercer evento? _______________
- Expliquen por qué el resultado de la primera extracción cambia o no el resultado de la segunda extracción

____

- Comparen las respuestas de sus preguntas, reflexionen sobre las diferencias que hayan tenido y arguméntenlas.

d) Analicen sus respuestas. A los eventos de los incisos a, b y c se les conoce como eventos independientes. ¿Cuáles son las características para que dos eventos o más sean independientes? _______________

¿Y cuáles para que no sean independientes? _______________

e) De manera grupal, y con la orientación de su profesor, concluyan sobre cuándo dos eventos son o no independientes. Escriban la conclusión en su cuaderno.

Lo que aprendí

1. Tomando en cuenta los eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes, analiza la siguiente situación y contesta las preguntas.

   a) Luis, Ana, Guadalupe, Lizbeth y Amador, han colocado dentro de una tómbola 30 tarjeras enumeradas del 1 al 30. Ellos extraerán una tarjeta y la regresarán a la tómbola. Cada uno de ellos propuso un evento con el que piensan que van a ganar. Los eventos son los siguientes:

   Luis gana si se extrae un número múltiplo de 4 mayor a 10.

   Ana gana si se extrae un número mayor a 15.

   Guadalupe gana si extrae un número par menor a 11.

   Lizbeth gana si se extrae un número no mayor a 15 o igual a 15.

   Amador gana si se extrae un número impar.

   - De los eventos anteriores, ¿cuáles no son mutuamente excluyentes? _______________
   - ¿Por qué no se puede afirmar que los eventos propuestos por Luis y Amador son independientes? _______________
   - Explica si los eventos de Luis y Guadalupe son o no eventos mutuamente excluyentes. _______________
   - Explica si los eventos de Amador y Guadalupe son o no eventos complementarios. _______________
   - ¿Cuál de los eventos anteriores es mutuamente excluyente con el de Amador? _______________
   - Propón un evento que sea complementario al evento de Luis. _______________
   - Propón un evento que no sea mutuamente excluyente al de Guadalupe. _______________

   b) Compara tus respuestas con las de otro compañero y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Comuniquen de manera grupal y con ayuda de su profesor analicen las respuestas correctas y la forma en que las obtuvieron.

Desafío

1. El experimento consiste en lanzar dos dados y obtener la diferencia entre los puntos obtenidos. De acuerdo con esta situación, plantea lo siguiente:

   a) Dos eventos que sean mutuamente excluyentes. ______

   b) Dos eventos no complementarios. ______

   c) Dos eventos que no sean mutuamente excluyentes. ______

   d) Compara tus respuestas con las de otro compañero. Analicen y verifiquen que efectivamente hayan realizado correctamente lo que se solicitó.

2. Con la orientación de su profesor, elijan una de las situaciones planteadas, analícenla y comuniquen los resultados correctos de los eventos solicitados.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

En un experimento aleatorio como el lanzar dos dados y extraer una esfera, tarjeta o ficha de una urna, es posible que haya eventos que sean mutuamente excluyentes, independientes o complementarios.

Dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen en común algún caso favorable, por ejemplo, al lanzar un dado, se tiene:

Evento A: que caiga un número menor a 3

Evento B: que caiga un múltiplo de 4

Los casos favorables son:

Evento A: (1 y 2)

Evento B: (4)

Como estos eventos no tienen ningún caso favorable en común, son mutuamente excluyentes.

Dos eventos son complementarios cuando al sumar sus casos favorables se obtiene el espacio muestral del experimento. Por ejemplo, al lanzar un dado, el espacio muestral es: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Evento A: que caiga un número par, (casos favorables: 2, 4 y 6).

Evento B: que caiga un número impar, (Casos favorables 1, 3, y 5).

Al sumar los casos favorables de A y B se obtiene el espacio muestral del experimento.

Dos eventos son independientes cuando al darse uno de ellos, no influye en el resultado del otro y el espacio muestral no se transforma. Por ejemplo, si al lanzar un dado se quiere obtener un número impar, y en un segundo lanzamiento obtener el 3, el resultado del primer lanzamiento no influye en el del segundo, y el espacio muestral sigue siendo 6 para ambos lanzamientos.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Lección 7: Diseño de una encuesta

Lo que sabes

1. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se indica.

   En el salón de tercero "A" se preguntó a los alumnos sobre la cantidad de integrantes de su familia. A continuación se presenta la respuesta de 15 alumnos:

   5, 4, 3, 6, 4, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 6, 4.

   a) ¿Cuál es la moda en estos datos? ______

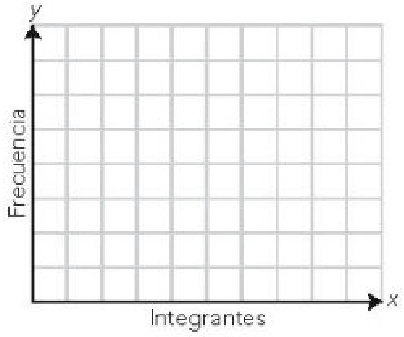
   b) ¿Cuál es la mediana? ______

   c) Realicen el procedimiento para obtener la media aritmética. ______

   d) ¿Qué significa este resultado? ______

   e) Construyan una tabla y una gráfica en las que se presenten estos resultados.

Integrantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa



   f) Escriban dos conclusiones que se puedan elaborar con los datos indicados en la tabla y en la gráfica. ______

   g) ¿Por qué es conveniente la elaboración de tablas y gráficas? ______

   h) ¿Qué tipo de gráficas conocen? ______

i) Tracen en los siguientes cuadros dos tipos de gráficas que conozcan y escriban lo que se pide.

- Nombre del tipo de gráfica.
- ¿Qué tipo de información se puede representar en ella?
- Características.
- Ejemplo.

- Nombre del tipo de gráfica.
- ¿Qué tipo de información se puede representar en ella?
- Características.
- Ejemplo.

j) Comparen con otras parejas y argumenten sus resultados. Con apoyo de su profesor, expónganlos al grupo y complementen su información respecto al tipo de gráficas. Escriban en su cuaderno otros tipos de gráficas que no hayan considerado.

Actividades

1. Analicen la siguientes situaciones y contesten las preguntas.

a) Una fábrica de jabón quiere lanzar una nueva presentación de su detergente en polvo y necesita aplicar una encuesta para determinar si es conveniente lanzarlo con las características que ahora tiene o bien realizar una nueva presentación con la información que se obtenga. Un censo determinó que hay aproximadamente 200 mil hogares en dicha ciudad.

- El gerente de mercadotecnia quiere que la encuesta se le aplique a cualquier persona que se encuentre en centros comerciales, mercados municipales y las principales terminales de autobuses. ¿Piensan que la idea del gerente sea la más adecuada para aplicar la encuesta?
- ¿Por qué?
- ¿A qué tipo de personas les aplicarías la encuesta?
- ¿Sería conveniente aplicarle la encuesta a alguna persona que no usa el jabón en polvo de esta fábrica? ¿Por qué?
- ¿Será conveniente aplicarle la encuesta a los 200000 hogares? ¿Por qué?
- ¿Cuál debe ser la muestra de la población a la que se le debe aplicar la encuesta? Es decir, ¿a cuántos consumidores de este producto será conveniente aplicarles la encuesta?
- Discutan sobre las características que deben reunir las personas a las que es conveniente aplicarles la encuesta, es decir, determinen la población de estudio. Escriban sus conclusiones.
- Se pudo determinar que la población para este estudio es de 50000 hogares. Discutan sobre la muestra a encuestar, es decir, a cuántos consumidores de este producto, uno por hogar, es pertinente encuestar para que los resultados que se obtengan sean útiles y poder decidir si se lanza o no este nuevo producto.
- Planteen cinco preguntas para conformar la encuesta que nos permita obtener información y determinar si es conveniente o no lanzar la nueva presentación.
- Organizados por su profesor, expongan sus preguntas y definan cuáles deben formar parte de la encuesta para obtener la información que se necesita.

b) En la escuela "Constitución Mexicana de 1917" se quiere realizar un estudio sobre el tiempo promedio que invierten los alumnos en llegar en transporte público a la escuela. En la escuela hay 12 grupos con 40 alumnos cada uno. Se determinó que una cuarta parte del total de los alumnos de esta institución viven alrededor de la escuela y llegan a pie.

- ¿Cuál es la población de esta investigación?
- ¿Cuál es la muestra que debe estudiarse?
- ¿Cuáles son las preguntas que deben conformar la encuesta?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.
- De manera grupal y con la orientación de su profesor, escriban una conclusión sobre:
- ¿Qué se debe entender por una población de estudio?
- ¿Qué se debe entender por muestra?
- ¿Qué es una encuesta?

2. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se indica.

a) En la escuela secundaria 96 se preguntó a los alumnos sobre las actividades que se quieren realizar para fin de año. Debido a que esta escuela tiene 18 grupos de 50 alumnos, sólo se les preguntó a los alumnos o alumnas con números de lista pares de cada grupo.

- ¿Cuál es la población de estudio en esta encuesta? ______
- ¿Cuál es la muestra? ______ ¿Cómo se obtuvo? ______
- ¿Qué relación tienen la población de estudio y la muestra? ______
- Argumenten si la muestra es suficiente o no para obtener la información que se necesita. ______
- ¿De qué otras formas se pudo haber elegido la muestra? ______
- En grupo, y con la moderación de su profesor, discutan sobre la conveniencia o inconveniencia de las formas de obtener la muestra. Elaboren y escriban sus conclusiones. ______

b) Los resultados obtenidos de la encuesta se registran de la siguiente manera.

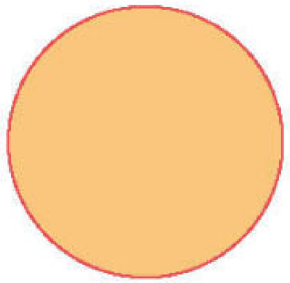
Actividad	Frecuencia
Posada	64
Pastorela	52
Convivio en el salón	88
Baile con sonido	143
Mañana deportiva	92
Otras actividades	11

- ¿Cuántos alumnos fueron encuestados? ______
- ¿Qué tipo de gráficas es posible realizar con los datos de la tabla? ______
- Realicen un gráfica que corresponda a la tabla anterior y contesten lo que se indica.

- Nombre del tipo de gráfica. ______
- Describan la gráfica. ______

c) Agreguen una columna a la tabla anterior y escriban lo que corresponda para hacer la gráfica de sectores. Trácenla en el siguiente círculo y coloquen los datos necesarios.

Actividad	Frecuencia	
Posada	64	
Pastorela	52	
Convivio en el salón	88	
Baile con sonido	143	
Mañana deportiva	92	
Otras actividades	11	



- Comparen la gráfica anterior con la de otras parejas. Con la orientación de su profesor, analicen si cumple con las características necesarias.

d) En grupo, y con la moderación de su profesor, discutan sobre las mejores opciones para representar gráficamente la información. Elaboren y escriban sus conclusiones. ______

e) Con base en lo realizado anteriormente, contesten.

- ¿Es adecuado este tipo de encuesta para llevar a cabo la actividad? ______
  Argumenten su respuesta. ______
- Si no fuera posible realizar el baile, ¿qué actividad se realizaría? ______ Explique por qué consideran esta actividad. ______
- Si ustedes son los responsables de la actividad y se les pide un informe al respecto, redáctenlo. ______
- Comparen sus respuestas con las otras parejas y, con apoyo de su profesor, expónganlas al grupo. Consideren si es necesario o no modificar modificarlas.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Población: Es el conjunto de elementos que reúnen todas las características definidas con anticipación para la realización de algún estudio o investigación.

Por ejemplo: si se quiere investigar sobre el consumo promedio de cierto alimento para bebés, la población de estudio serán aquellos que consuman dicho producto.

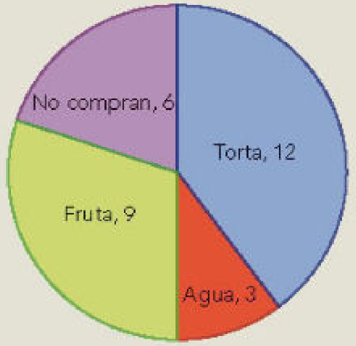
Muestra: Es una porción de la población de estudio que permite realizar la investigación tomando los resultados de manera proporcional. Cuándo una población de estudio es demasiado grande y no es posible estudiarla o investigarla en su totalidad, se toma sólo una parte ella. Cuando la población puede ser investigada en su totalidad, no es necesario tomar una muestra.

Por ejemplo: la población de estudio del consumo promedio de cierto alimento para bebes es de 30 000 consumidores. Como puede ser imposible o demasiado costoso investigar a toda la población, sólo se tomará un parte de ella, y se decide que sólo se encuestará a 1 de cada 10, es decir, a 3000 consumidores.

Cabe señalar que hay diferentes maneras de elegir la muestra: anunciar que quienes quieran pueden acudir a responder la pregunta (voluntarios); preguntarle a personas que tiene uno cerca o a los amigos (conveniencia); elegir la muestra al azar, por ejemplo, conseguir una lista de todos los estudiantes de la secundaria, asignarles un número. Con un dispositivo aleatorio, elegir al azar tantos números como se quiere que sea el tamaño de la muestra y se pregunta a los estudiantes que salieron sorteados (Aleatorio).

Encuesta: Es el conjunto de preguntas modeladas que tienen como objetivo indagar sobre la opinión o puntos de vista que se tienen sobre cierto tema de estudio.

En el *diagrama o gráfica de sectores* los datos se representan en un *círculo*, de modo que el *ángulo* de cada *sector* es *proporcional* a la *frecuencia absoluta* correspondiente. El diagrama circular se construye con la ayuda de un transportador para medir la amplitud de los ángulos. Por ejemplo: En una encuesta sobre la preferencia de lo que compran en la tienda escolar, aplicada a 30 alumnos, 12 compran una torta, 3 compran agua, 9 compran fruta y los demás no compran porque llevan alimentos de su casa.



Producto	Alumnos	Ángulo
Torta	12	144°
Agua	3	36°
Fruta	9	108°
No compran	6	72°
Total	30	360°

Lo que aprendí

1. Tomando en cuenta los conceptos de población, muestra y encuesta, realicen un estudio estadístico sobre alguno de los siguientes temas y desarrollen lo que se indica.

- Escuela de nivel medio superior que tomarán como primera opción los alumnos de tercero.
- Alumnos que continuarán con sus estudios.
- Alumnos de esta escuela que trabajan.
- Materia preferida por los alumnos de mi escuela.
- Actividad preferida de los estudiantes de esta escuela en su tiempo libre.
- Pueden considerar otro tema que crean relevante o interesante.

a) En su estudio estadístico, determinen:

- Temática. ____
- Propósito de la investigación. ____
- Población de estudio. ____
- Muestra, ¿cómo la obtendrán? ____
- Argumenten por qué consideran que la muestra es representativa para su investigación. ____
- El cuestionario o formato que se aplicará. ____

- Concentración de la información. ____
- Representación de la información (tablas y gráficas) de la información obtenida. Regístrenlas en su cuaderno.
- Elaboren en su cuaderno el informe.
- Conclusiones obtenidas. ____

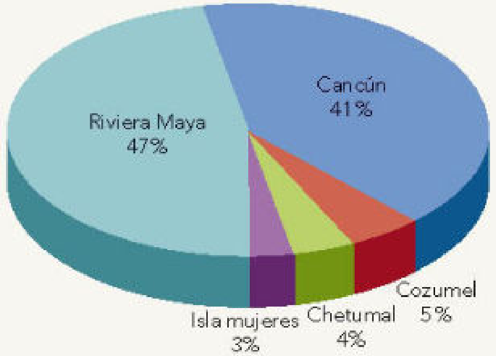
b) Si tienen acceso a computadora en su escuela, diseñen una presentación con diapositivas. Organizados por su profesor, expongan al grupo lo realizado en su investigación.

- Intercambien sus trabajos y comenten sobre lo que realizaron los demás equipos.
- Escriban los puntos más importantes de lo que los demás equipos han comentado de su trabajo. ____

2. En grupo, y con el apoyo de su profesor, analicen las distintas investigaciones y reflexionen sobre la utilidad que tiene estructurar una investigación con base en algún tema de interés personal o colectivo que les permita tomar decisiones y/o ampliar sus conocimientos. Escriban una conclusión al respecto. ____

Desafío

1. Analicen el siguiente gráfico y contesten las preguntas.



- Si el total de turistas es de 703607, ¿cuántos turistas visitaron la Riviera Maya? ____
- ¿Cuáles son las características de la población de estudio de esta investigación? ____
- Planteen dos preguntas que consideres que se podrían formular para obtener información en esta investigación. ____

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, reflexionen sobre las diferencias encontradas y, con la ayuda de su profesor, analicen la pertinencia de sus preguntas para esta investigación.

Evaluación tipo PISA

El dado

Pregunta 1: Analiza el siguiente experimento y escribe sobre cada línea lo que hace falta.

Experimento: lanzar un dado.

Espacio muestral: E = {________________}

Evento A: cae un número menor que 3. A = {________________}

Evento B: cae un número mayor que 4. B = {________________}

Evento C: cae el número 3. C = {________________}

Evento D: cae un número distinto de 3. D = {________________}

Pregunta 2: Marca dentro del paréntesis, falso o verdadero, la opción correcta según lo que indica el enunciado.

	Falso	Verdadero
a) Los eventos A y B son mutuamente excluyentes	( )	( )
b) Los eventos C y D son complementarios	( )	( )
c) El evento A es independiente del evento B	( )	( )
d) Los eventos B y D son complementarios	( )	( )

Pregunta 3: Argumenta cada una de tus respuestas.

a) ________________________________

b) ________________________________

c) ________________________________

d) ________________________________

Las ventas

Pregunta 1: La compañía El trenecito sabe que la relación piezas-ganancias está dada por la función $y = x(x + 3)$. ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a esta relación? ________________

a)

Piezas	3	5	10	15
Ganancias	18	24	60	75

b)

Piezas	3	5	8	10
Ganancias	18	24	88	100

Evaluación tipo PISA

c)

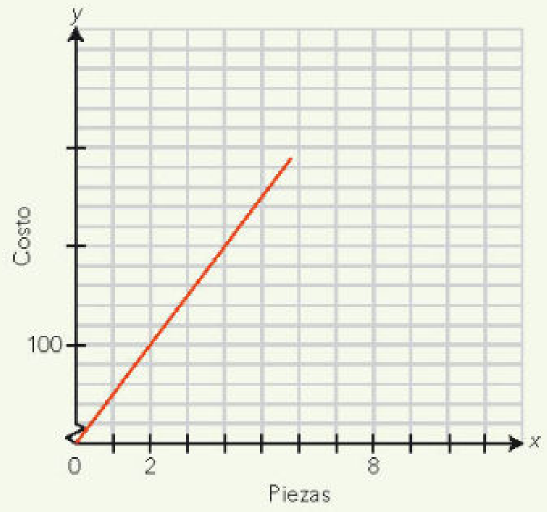
Piezas	3	5	10	12
Ganancias	18	40	130	180

d)

Piezas	3	5	10	12
Ganancias	18	24	60	180

Pregunta 2: ¿Qué tipo de variación guarda la relación piezas-ganancias? ________________

Pregunta 3: La empresa construyó el gráfico de relación piezas-costo. El director quiere saber si estas dos magnitudes son o no proporcionales. De acuerdo con el gráfico siguiente, justifiquen si dichas magnitudes son o no proporcionales y escríbanlas dentro del recuadro.



BLOQUE 2

La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras, y el otro el número áureo. El primero puede compararse a una medida de oro, y el segundo a una piedra preciosa.
Johannes Kepler

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientes

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Lección 8: Problemas que implican ecuaciones cuadráticas

Lo que sabes

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) Rosa y José compraron un terreno como el que se muestra en la imagen, y desean conocer sus dimensiones. ¿Cuál es la longitud posible de cada lado?

b) Javier y Marisol están concursando en un *rally* escolar. Para ganar, les hace falta descubrir en dónde se encuentran las dos últimas pistas, que están escondidas en dos salones. Para saber en qué número de salón están tienen que resolver la siguiente situación.

- El producto de dos números es 180, uno de los factores es mayor que el otro por tres unidades. ¿Cuáles son esos números?

2. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $36x^2 - 81 =$

b) $81y^2 + 90y + 25 =$

c) $x^2 + 9x + 14 =$

d) $x^2 - 3x - 54 =$

e) $9x^2 - 6x - 35 =$

3. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿A qué se le llama trinomio cuadrado perfecto?

b) ¿A qué se le llama diferencia de cuadrados?

c) ¿A qué se le llama trinomio general de segundo grado?

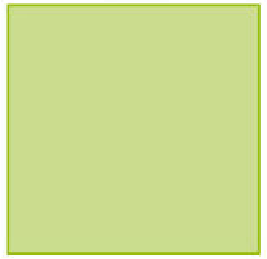
4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros, reflexionen y justifiquen las diferencias que hayan encontrado. Con la orientación de su profesor, concluyan cómo se factoriza un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP), una diferencia de cuadrados y un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

Actividades

1. Lean cada uno de los siguientes problemas. Para resolverlos, realicen lo que se les indica.

a) Gabriel acaba de comprar un terreno y necesita bardearlo. Para saber cuánto material va a requerir, ha representado el área con la figura verde, que es de 289 m². ¿Cuánto mide por lado el terreno?

$x + 2$



- Expliquen si es correcta o no la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 289$, que modela este problema.
- ¿El trinomio $x^2 + 4x + 4$, es cuadrado perfecto? ¿Cuál es la factorización?
- Si se sustituye la factorización anterior en la ecuación planteada, ¿cuál es la expresión que resulta?
- Expliquen si la expresión: $x + 2 = \pm 17$ resulta al obtener la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.
- ¿Qué número sumado a 2 es igual a $+17$?
- ¿Qué número sumado a 2 es igual a -17?
- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación planteada, es decir, cuáles son los valores de x?
- ¿Cómo se podría comprobar que las raíces obtenidas son las correctas?
- ¿Cuál es la longitud de cada lado de este cuadrado?
- Argumenten por qué la raíz negativa no puede tomarse como respuesta para la resolución de este problema.

b) Julio tiene una lámina de forma cuadrada, el polinomio que modela el área de su lámina es $x^2 - 10x + 25 = 64$. Analicen la siguiente solución y contesten las preguntas.

$$x^2 - 10x + 25 = 64$$
$$(x^2 - 5)^2 = 64$$
$$\sqrt{(x^2 - 5)^2} = \sqrt{64}$$
$$x - 5 = \pm 8$$

$x_1 = 8 + 5$ $\quad$ $x_2 = -8 + 5$

$x_1 = 13$ $\quad$ $x_2 = -3$

- Justifiquen si el trinomio $x^2 - 10x + 25$, es o no cuadrado perfecto.
- ¿Cómo se determinó la expresión $(x - 5)^2$?
- ¿Cómo se determinó la expresión $x - 5$?
- Justifiquen por qué $\sqrt{64}$ es $+8$ y -8.
- ¿Cómo se obtuvieron $x_1 = 13$ y $x_2 = -3$?
- ¿Cuál sería otra manera de obtener las raíces de esta ecuación?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas, confronten su resultados y reflexionen sobre el procedimiento que debe seguirse para dar solución a una ecuación cuadrática cuando uno de los miembros es un trinomio cuadrado perfecto.

c) Andrés quiere saber si -19 corresponde a una sucesión con generalización $(x - 9)^2 - 2x$; de serlo, ¿qué término es en ésta? Él planteo la ecuación de la siguiente manera $(x - 9)^2 - 2x = -19$. ¿Cuáles son las raíces de esta ecuación?

$$(x - 9)^2 - 2x = -19$$
$$x^2 - 18x + 81 - 2x = -19$$
$$x^2 - 18x + 81 + 19 - 2x = -19 + 19$$
$$x^2 - 20x + 100 = 0$$
$$(x - 10)^2 = 0$$
$$\sqrt{(x - 10)^2} = \sqrt{0}$$
$$x - 10 = 0$$
$$+10 + x - 10 = 0 + 10$$
$$x = +10$$

- Expliquen si hay algún número que elevado al cuadrado y disminuido en el doble de ese mismo número, de -19.
- ¿Qué diferencias encuentran entre esta solución y la del inciso b?
- ¿Por qué piensas que se tuvo que resolver el binomio al cuadrado?
- ¿Cómo se obtuvo la expresión $x^2 - 20x + 100$?
- ¿Qué número de término es el -19 en la sucesión $(x - 9)^2 - 2x =$
- ¿Qué término de esta sucesión será el número 62?

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, justifíquenlas y reflexionen sobre cómo se pueden resolver las ecuaciones de segundo grado cuando uno de los miembros es un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP) así como el número de raíces que tienen.

   a) De manera grupal, y con ayuda de su profesor, concluyan sobre cómo se resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (Cuando es un TCP) Escriban su conclusión.

Actividades

1. Analicen la solución del siguiente problema.

   a) Alejandra tiene una parcela que ha seccionado para la siembra de verduras; la cebolla se destinó en un espacio similar al de la imagen. ¿Cuál es la longitud de los lados del terreno?

$$x^2 = 324$$
$$-324 + x^2 = 324 - 324$$
$$x^2 - 324 = 0$$
$$(x + 18)(x - 18) = 0$$
$$x_1 + 18 = 0 \qquad x_2 - 18 = 0$$
$$x_1 = -18 \qquad x_2 = 18$$

- ¿Qué nombre recibe la expresión $x^2 - 324$?
- ¿Cómo se determinó $(x + 18)(x - 18)$?
- ¿Qué nombre reciben a los binomios como $(x + 18)(x - 18)$?
- Expliquen cómo se obtuvo $x_1 = -18$.
- Expliquen cómo se obtuvo $x_2 = +18$.
- ¿Por qué la raíz que soluciona este problema es $+18$ y no -18?
- ¿De qué otra manera se podría resolver esta ecuación de segundo grado, empleando un método distinto a la factorización?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas, justifíquenlas y reflexionen sobre las diferencias. Por último, orientados por su profesor, comuniquen cuáles son los resultados correctos.

b) A Rubén, el vidriero, le solicitaron el presupuesto de un vidrio con una superficie cuadrada. Para determinar el precio del vidrio realizó una operación en su calculadora y obtuvo 196. Según él, es el área del vidrio que le pidieron. ¿Cuánto mide por lado el vidrio que le solicitaron a Rubén? Contesten las siguientes preguntas para resolver este problema.

- ¿Cuál es la ecuación que modela el problema anterior? ____________________
- ¿Cuánto vale $\sqrt{196}$? ____________________
- ¿Cuáles son las raíces de esta ecuación? ____________________
- ¿Cómo se podría comprobar que las raíces obtenidas son las correctas? ____________________
- Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado cuando uno de los miembros es una diferencia de cuadrados, y cuántas raíces tienen.

c) En su cuaderno, planteen un problema que se pueda resolver factorizando una diferencia de cuadrados, y resuélvanlo.

- Analicen el problema planteado por otra pareja y evalúen si efectivamente reúne los requisitos solicitados.

d) De manera grupal, analicen la solución de los problemas planteados en los incisos a y b. Con ayuda de su profesor, concluyan sobre cómo se resuelve por factorización una ecuación de segundo grado donde uno de los dos miembros es una diferencia de cuadrados. Comuniquen el procedimiento y escríbanlo en su cuaderno.

Actividades

1. Analicen la solución, por medio de la factorización, del siguiente problema y contesten las preguntas.

a) La ventana de un edificio ocupa el área que se muestra en la imagen. Se sabe que su base es mayor que la altura por 6 m. ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana? ____________________

$$x(x - 6) = 160$$

$$x^2 - 6x = 160$$

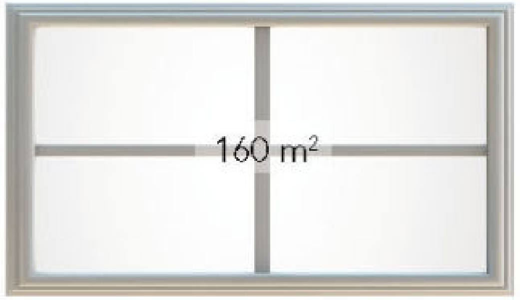
$$x^2 + 6x - 160 = 160 - 160$$

$$x^2 + 6x - 160 = 0$$

$$(x + 16)(x - 10) = 0$$

$$x_1 + 16 = 0 \qquad x_2 - 10 = 0$$

$$x_1 = -16 \qquad x_2 = +10$$



- ¿Qué nombre recibe la expresión $x^2 + 6x - 10$? ____________________
- ¿Cómo se obtuvo la expresión $(x + 16)(x - 10)$? ____________________
- ¿Cómo se podría comprobar que las raíces obtenidas son las correctas? ____________________
- ¿Cuál de las dos raíces se tomaría para determinar la base y altura del rectángulo? ____________________
- ¿Cuál es la longitud de la base? ____________________
- ¿Cuál es la longitud de la altura? ____________________
- ¿De qué manera se puede comprobar que las dimensiones obtenidas son correctas? ____________________
- ¿De qué otra manera se pueden obtener las raíces de esta ecuación cuadrática? ____________________
- Comparen sus resultados, justifiquen sus diferencias y comuniquen de manera grupal las respuestas correctas.

b) El producto de las edades de Juan y Alberto es de 117 años. Si Juan es mayor que Alberto por cuatro años, ¿cuánto suman las edades de ellos dos? ____________________

- ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela este problema? ____________________
- ¿Cuáles son las raíces de esta ecuación? ____________________
- ¿Cuál es la solución de este problema? ____________________
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre cómo se resuelve una ecuación cuadrática cuando uno de sus miembros es un trinomio general de segundo grado.

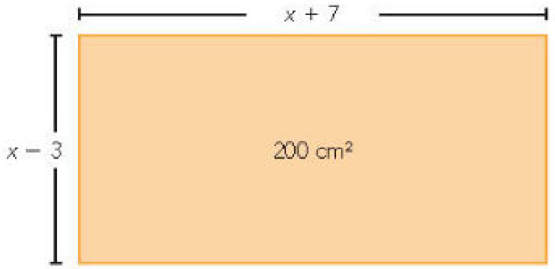
c) En su cuaderno, planteen un problema que se pueda resolver al factorizar un trinomio general de segundo grado y resuélvanlo.

- Analicen el problema planteado por otra pareja y evalúen si efectivamente reúne los requisitos solicitados.

d) De manera grupal y con ayuda de su profesor concluyan sobre cómo se resuelve por factorización una ecuación cuando uno de los miembros es un trinomio general de segundo grado, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Comuníquenla y escríbanla. ____________________

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Armando usó nueve cuadrados del mismo tamaño para formar otro de 144 cm². ¿Cuál es la longitud de cada lado de los cuadrados pequeños? ______
   b) Luis necesita una hoja de papel cascarón con las características que se muestran en el esquema. ¿Cuáles son las dimensiones de dicha hoja? ______

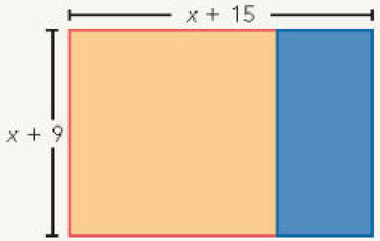


   c) Un terreno de forma cuadrada tiene un área de 328 m². Para construir en él, por reglamento se debe dejar libre un metro al frente y uno al costado. ¿Cuál es la longitud de cada lado del terreno? ______
   d) El producto de dos números es -255. Si uno de los factores excede al otro en dos unidades, ¿cuáles son esos números? ______ ¿Cómo obtuviste la solución de este problema? ______
   e) Compara tus respuestas con otros compañeros, justifiquen sus respuestas y, con la ayuda de su profesor, comuníquenlas de manera grupal.
2. Contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál es el nombre que reciben los resultados de una ecuación cuadrática? ______
   b) ¿Por qué la raíz cuadrada de un número tiene una raíz positiva y una negativa? ______
   c) ¿Hasta cuántas raíces tiene una ecuación cuadrática? ______
   d) ¿En qué consiste resolver una ecuación por factorización? ______
3. En tu cuaderno resuelve por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas.
   a) $36x^2 = 900$
   b) $(3x)(2x + 4) = 5x^2 - 35$
   c) ¿Cómo resolviste cada una de las ecuaciones anteriores? ______
4. Compara tus resultados y procedimientos con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la ayuda de su profesor, comuniquen cómo se tienen que resolver este tipo de ecuaciones cuadráticas.

Desafío

1. Resuelvan el siguiente problema.

   Se piensa construir una bodega en un terreno de 567 m². La bodega será la zona marcada en azul y el patio de maniobras la parte en naranja. ¿Cuáles son el área y las dimensiones de la bodega? ______



2. Comparen su resultado con el de otros compañeros y reflexionen sobre los posibles errores que hayan cometido. Comuniquen su procedimiento y, con la ayuda de su profesor, valúen si son correctos.

Notas importantes

Para complementar tus ideas, lee la siguiente información.

Las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Se denominan ecuaciones completas cuando tienen sus tres elementos —el cuadrático (ax^2), el lineal (bx) y el independiente (c)—. Son incompletas cuando falta el término lineal o el independiente y son de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

Las ecuaciones cuadráticas completas pueden ser un Trinomio Cuadrado Perfecto o un Trinomio General de Segundo Grado. Las primeras se factorizan en un binomio al cuadrado y las segundas en binomios con un término común.

Por ejemplo, en la ecuación de la izquierda el primer miembro es un TCP, y el primer miembro de la ecuación de la derecha es un trinomio general de segundo grado.

$$x^2 - 10x + 25 = 36$$
$$(x - 5)^2 = 36$$
$$\sqrt{(x - 5)^2} = \sqrt{36}$$
$$x - 5 = \pm 6$$
$$x_1 = 6 + 5 \qquad x_2 = -6 + 5$$
$$x_1 = 11 \qquad x_2 = -1$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$
$$(x + 8)(x - 2) = 0$$
$$x_1 + 8 = 0 \qquad x_2 - 2 = 0$$
$$x_1 = -8 \qquad x_2 = +2$$

Una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$, se resuelve factorizándola en binomios conjugados, de la siguiente manera.

$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x_1 + 4 = 0 \qquad x_2 - 4 = 0$$
$$x_1 = -4 \qquad x_2 = +4$$

Las ecuaciones cuadráticas en general tienen dos raíces, es decir, dos resultados. Sin embargo, cuando uno de los miembros de la ecuación es un TCP y el otro miembro es 0, tendrá una sola raíz.

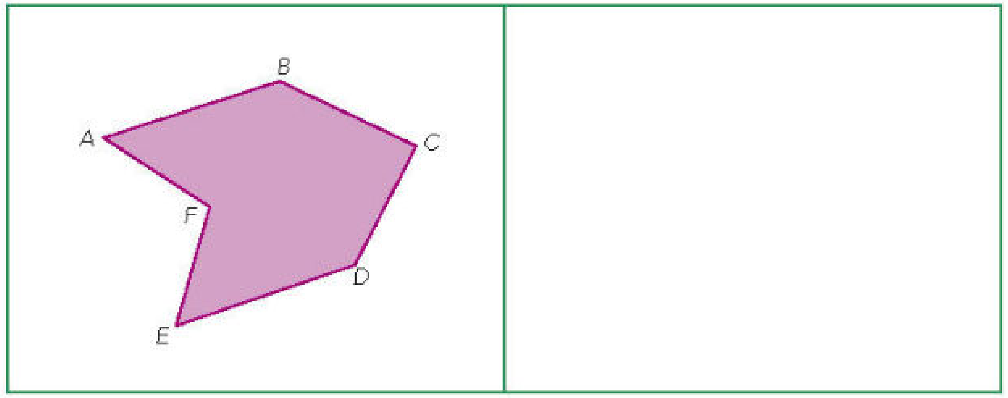
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Lección 9: Rotación y traslación de figuras

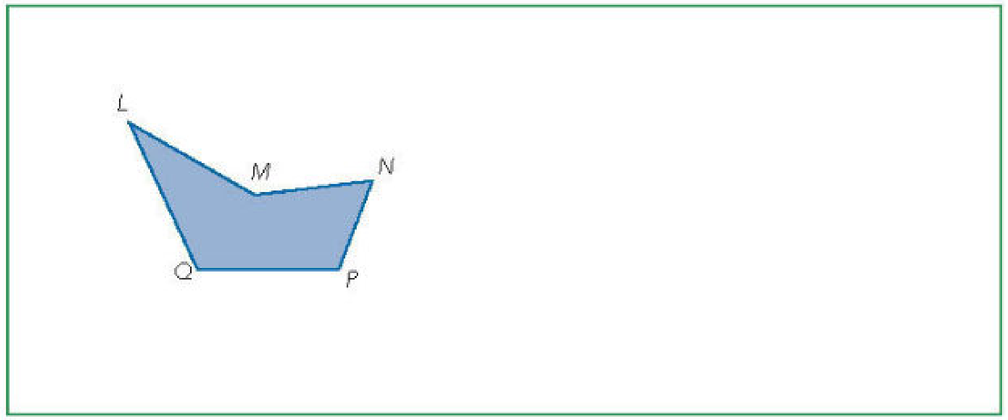
Lo que sabes

1. Analiza cada una de las siguientes situaciones y realiza lo que se pide.

a) En el recuadro de la derecha, traza el polígono *A'B'C'D'E'F'* de manera que *AB* sea congruente con *A'B'*; BC con *B'C'*; CD con *C'D'*; DE con *D'E'*; *EF* con *E'F'* y *FA* con *F'A'*. La figura transformada debe quedar en una posición diferente a la original.



b) Considera el polígono *LMNPQ*, traza el polígono *L'M'P'N'P'Q'*, de manera que *LM//L'M'*; *MN//M'N'*; *NP//N'P'*; *PQ//P'Q'* y *QL//Q'L'*.



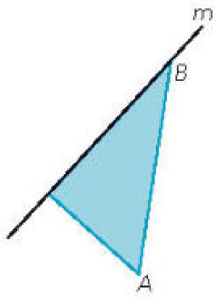
c) Compara tus trazos con los de otros compañeros y, coordinados por su profesor, compartan ante el grupo las dificultades que tuvieron para transformar sus polígonos.

Actividades

1. Analicen cada una de las siguientes situaciones y contesten.

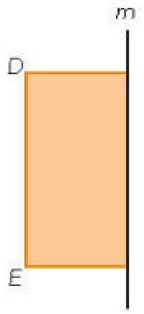
Cierta ocasión, Ramiro colocó un espejo sobre la recta *m* de las imágenes que se muestran en cada recuadro.

a)



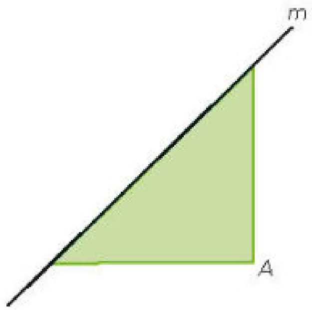
- ¿Qué figura se formará al completar la imagen? ______
- Haz el trazo.
- ¿A qué distancia de *m* estará *A'*? (se lee *A* prima) ______
- ¿Cuál va a ser la medida de cada lado de la figura simétrica de la figura? ______
- ¿Cuál va a ser la amplitud del ángulo *AA'B*? ______
- Completen la figura.
- Tracen otros ejes de simetría en la figura.
- Comparen su figura y sus respuestas con las de otras parejas. En caso de haber diferencias, justifíquenlas.

b)



- ¿De cuánto será la longitud de los lados simétricos de la figura? ______
- ¿Qué figura se formará? ______
- Realiza el trazo.
- ¿Cuál va a ser la amplitud de los ángulos *DD'E'* y *D'E'E*? ______
- Completen la figura y tracen otros ejes de simetría.
- Comparen su figura y sus respuestas con las de otras parejas. En caso de haber diferencias, justifíquenlas.

c)

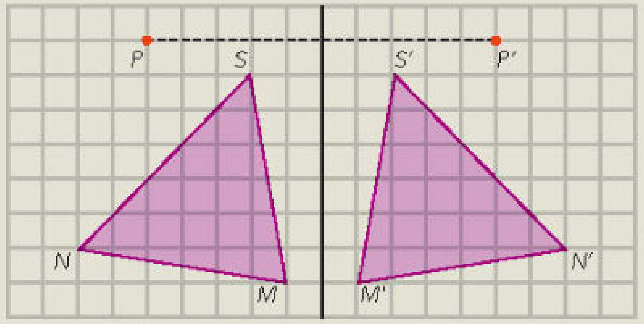


Anticipen lo que sucederá con las medidas de los lados y los ángulos simétricos de la figura. ______

- Realicen los trazos necesarios para completar la figura y argumenten si se cumple o no su afirmación anterior. ______
- Orientados por su profesor, y de manera grupal, elaboren una conclusión acerca de lo que sucede con los lados y ángulos de una figura al trazar su figura simétrica. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.



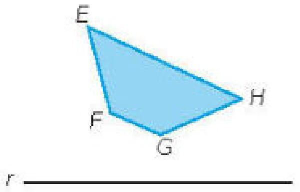
Eje de reflexión r

Una reflexión o simetría axial es una transformación en el plano que deja fijos los puntos de una recta r (el eje de reflexión o de simetría). Si P es un punto que no pertenece al eje r, entonces su imagen P', mediante la reflexión del eje r, es tal que el segmento PP' es perpendicular a r y las distancias de los puntos P y P' a r son iguales (el eje r es mediatriz del segmento PP').

Actividades

1. Realicen lo que se pide en cada uno de los siguientes casos y contesten.

a) Considerando que r es eje de simetría, tracen la figura simétrica del polígono $EFGH$, al polígono obtenido. Llámenle $E'F'G'H'$.



Glosario

Homólogo. Que presenta la misma forma o comportamiento que otro.

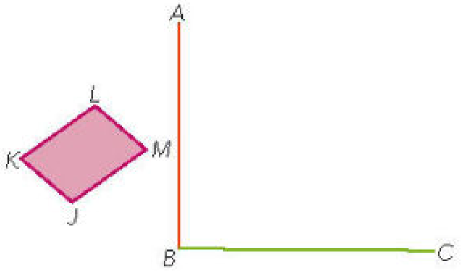
- ¿Cómo son los segmentos y ángulos **homólogos** entre ambos polígonos? ______
- Coloquen otro eje de simetría, de modo que la figura simétrica $E''F''G''H''$ quede como está el cuadrilátero $EFGH$. ¿Qué características tiene esta recta?

______

______

b) Tomando como referencia el siguiente polígono y los ejes de simetría mostrados, realicen en su cuaderno lo que se pide.

- Considerando al segmento AB como eje de simetría, tracen el polígono $J'K'L'M'$.
- Consideren al segmento BC como eje de simetría, tracen el polígono simétrico ($J''K''L''M''$) de la figura $J'K'L'M'$



- ¿Cómo son los segmentos y los ángulos homólogos de la figura original con respecto a las otras dos?

______

- Platiquen con su profesor sobre las características de una figura y su simétrica. Lleguen a conclusiones y escríbanlas. ______

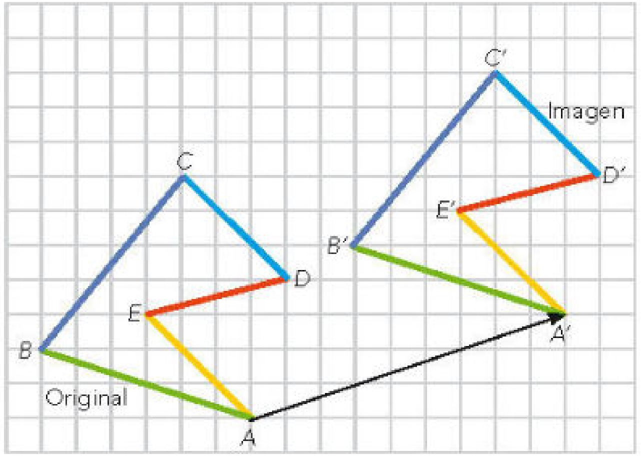
______

______

Actividades

1. Analicen el siguiente dibujo y realicen lo que se indica.

a) Une con una flecha cada vértice de la figura original con su homólogo, como se muestra en la imagen.



- ¿Cuáles son las características de las rectas que unen los vértices de ambas figuras? ______

______

- ¿En qué se parecen los segmentos de la figura original y sus homólogos en la imagen? ______

______

- Compara la amplitud de cada ángulo de la figura original con su ángulo homólogo en la imagen. ¿Cómo son entre sí? ______

______

b) En la imagen anterior, la flecha se llama *directriz*, la longitud de la flecha se llama *magnitud* y el movimiento que se realizó a la figura original es una *traslación*. De acuerdo con esta información, definan en qué consiste la traslación de una figura. ______

______

c) Orientados por su profesor, elaboren una definición grupal sobre el movimiento de traslación de una figura y las características con su respectiva imagen. ______

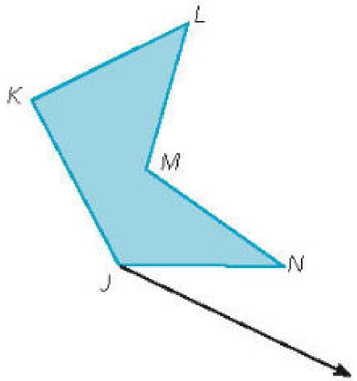
______

2. Copien en su cuaderno el polígono *JKLMN* y realicen la translación, considerando la directriz y la magnitud que se marca. Nombren *J'K'L'M'N'* a la figura que obtengan.

   a) Describan los pasos que siguieron para realizar la traslación del polígono *JKLMN*. ______

   b) ¿Cómo se puede trasladar una figura empleando la simetría axial? ______

   c) Reflexionen si las características de la figura que trasladaron y su homóloga cumplen con la definición que obtuvieron de manera grupal.



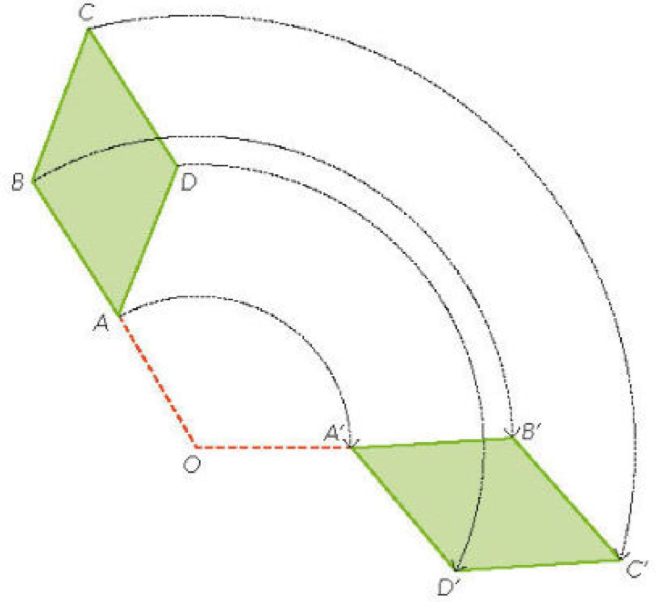
Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

En todo movimiento de traslación los lados de las figuras y su imagen son congruentes y paralelos, sus vértices equidistantes y sus ángulos congruentes. Toda traslación tiene una dirección y magnitud determinada por la directriz.

Actividades

1. Analicen la siguiente figura y realicen lo que se indica.



a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo *AOA'*? ______

b) Tracen los ángulos *BOB'*, *COC'* y *DOD'*. ¿Qué tienen en común sus amplitudes? ______

c) ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre la figura *ABCD* y la figura *A'B'C'D'*? ______

d) El movimiento que se realizó al polígono *ABCD* se le llama *Rotación*.

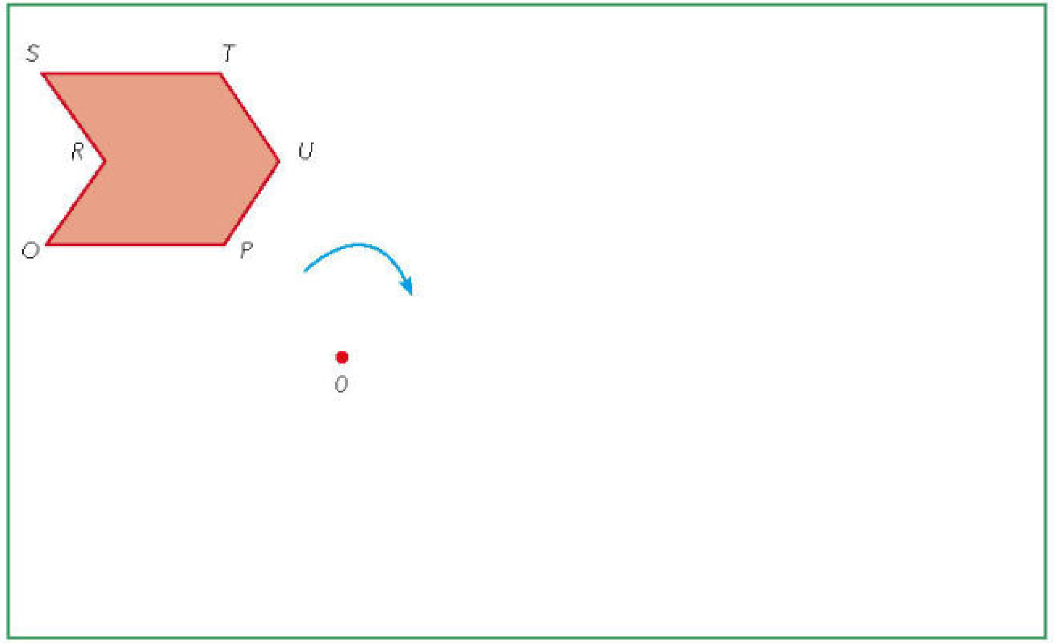
Al punto *O* se le llama *centro de rotación* y las flechas indican el sentido de la rotación. De acuerdo con esta información, definan en qué consiste la rotación de una figura. ______

e) ¿Qué características tiene la figura original y su imagen? ______

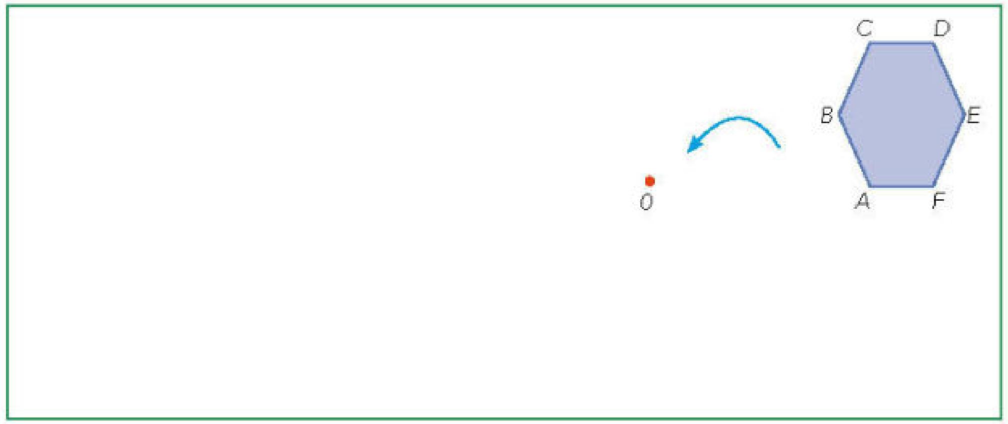
f) Coordinados por su profesor, elaboren una definición grupal sobre el movimiento de rotación de una figura y las características con su respectiva imagen. ______

2. En el recuadro correspondiente realicen la rotación de cada polígono considerando la información que se presenta en cada figura.

   a) 90°



b) 180°



- Coordinados por su profesor, reflexionen si se cumple con la definición y las características de la rotación que enunciaron en la actividad anterior.

3. Apliquen la simetría central y tracen una figura simétrica al hexágono regular. Comparen la figura trazada con la realizada en la rotación a 180°.

- ¿Qué similitud encuentran entre la rotación a 180° y la simetría central? ______________________________

- Argumenten si al rotar una figura a cualquier ángulo se produce la misma imagen que la de una simetría central. ______________________________

Notas importantes

Considera esta información para complementar tus ideas.

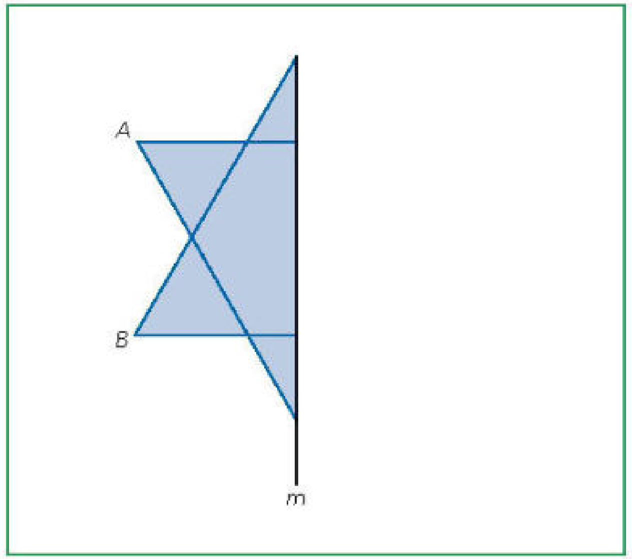
Para poder realizar la rotación de una figura se necesita conocer el ángulo de giro, el centro de rotación y el sentido de la rotación.

Lo que aprendí

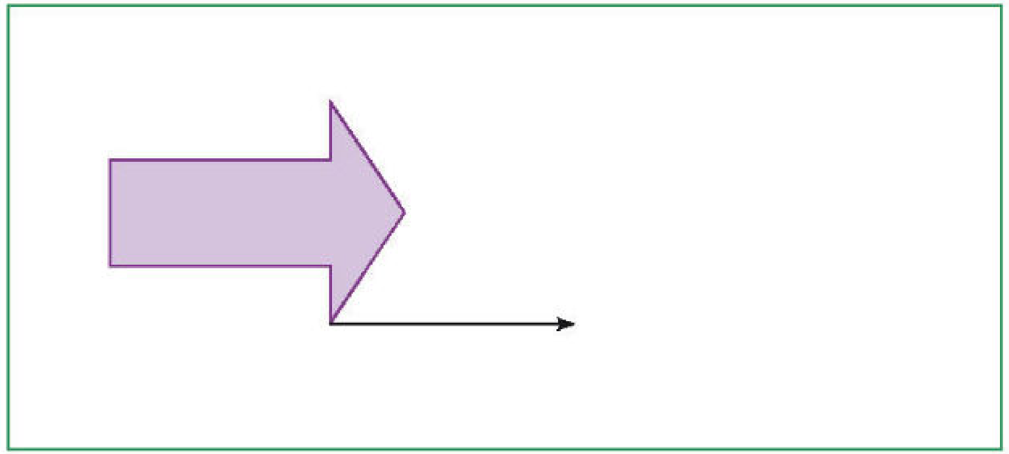
1. Analiza los siguientes planteamientos y realiza lo que se pide.

a) Martín está buscando el diseño para una puerta que colocará en su recámara. Cuando visitó al carpintero sólo pudo observar la parte que se muestra en la imagen.

- Completa el diseño de la puerta considerando *m* como eje de simetría.



b) En la construcción de un puente vehicular hay varios señalamientos, entre ellos, uno de foquitos donde se visualiza una flecha como la de la imagen. Además, se van prendiendo los foquitos, como lo indica la directriz, de modo que siempre se visualiza una flecha. Traslada el polígono que se obtiene cuando se van prendiendo los foquitos del señalamiento vial.



c) Margarita forma parte del desfile deportivo de su escuela. Para realizar su dinámica llevan pancartas de colores, como la figura que se muestra en la imagen 1. En algún momento de la rutina, la pancarta quedó como se muestra en la imagen 2.

- Margarita afirma que sólo giró 90° de donde se encontraba. Argumenten si ella tiene o no razón.

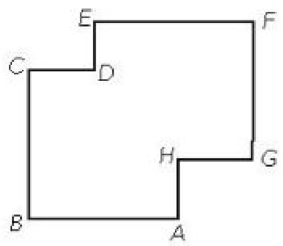


Imagen 1

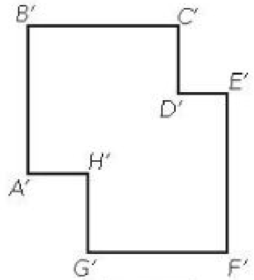


Imagen 2

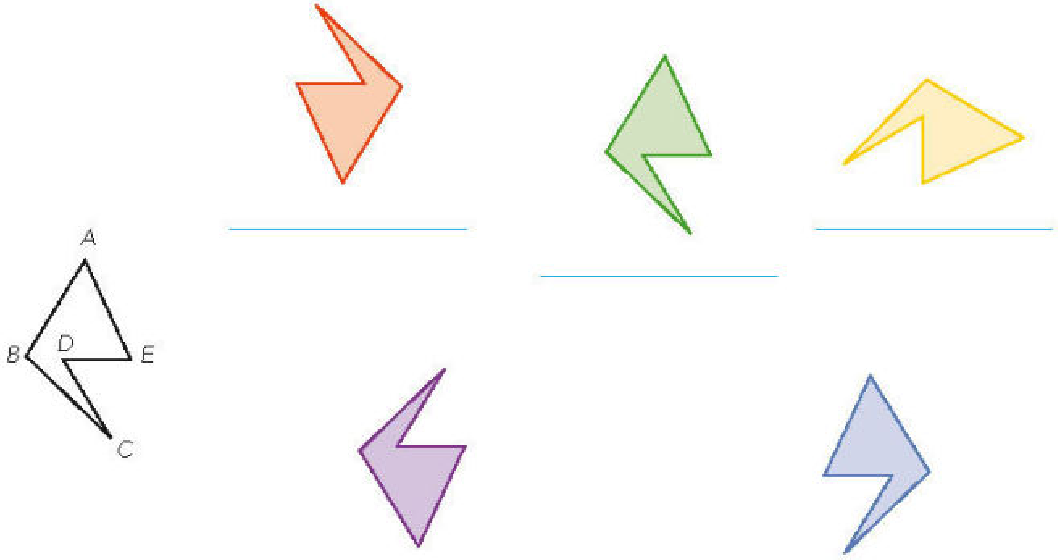
d) Argumenta en qué caso de los incisos anteriores se realizó una simetría axial, en cuál una rotación y en cuál una traslación. ______

______

______

e) Comenten de manera grupal sus respuestas. Orientados por su profesor, concluyan sobre las características de la simetría axial, la traslación y la rotación de figuras.

2. Analicen cada una de las figuras en color y escriban sobre la línea la relación que tiene con el polígono *ABCDE*.



a) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Reflexionen sobre cómo se puede determinar si una figura fue rotada, trasladada o si se le aplicó la simetría central o axial. ______

______

Enlázate

Para que amplíes tus conocimientos acerca de los tipos de movimientos que se pueden realizar en un plano, te sugerimos que visites esta página e indagues acerca de las transformaciones que se le pueden realizar a una figura geométrica. Comenta con tus compañeros y tu profesor sobre los grupos de simetría que hay.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/movimientos_plano_iar/index.htm
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:12 horas.)

Desafío

1. Reproduce en una hoja blanca la siguiente figura, por medio de simetría axial, traslación o rotación.

a) ¿Qué sucedió? ______

Horizonte cultural

Los movimientos de rotación y traslación en las maquinarias.

Existen muchas máquinas que combinan movimientos de rotación y traslación. Una de ellas es el motor de los automóviles; los pistones se trasladan y con el árbol de levas generan un movimiento de rotación que al final hace que el automóvil se desplace. Averigua qué otros sistemas utilizan estos dos movimientos simultáneamente. Coméntalas con tus compañeros y tu profesor.

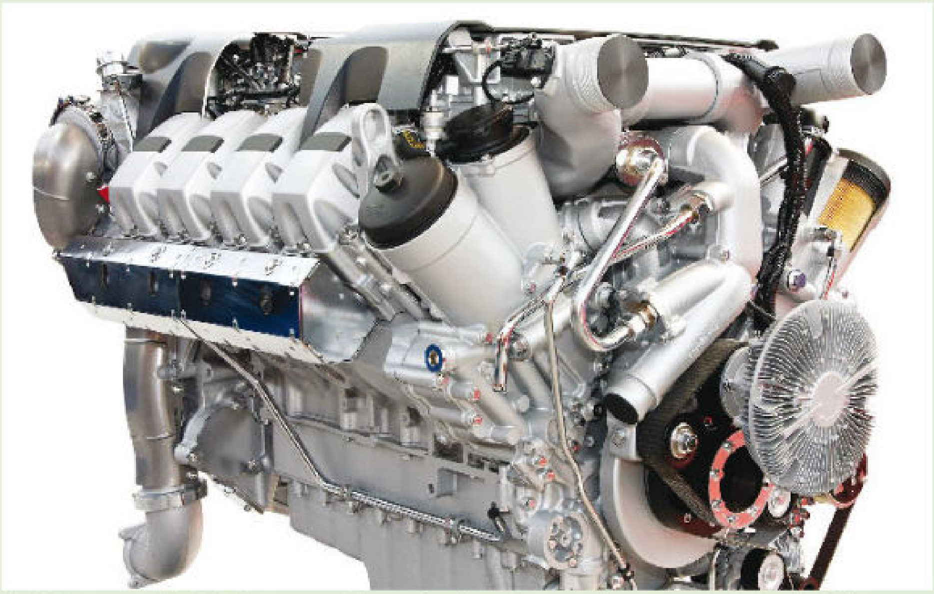


Fig. 2.1 Los usos del árbol de levas son variados, uno de ellos es el que se aplica en el motor de los automóviles.

Fuente: https://matematicasmartinrivero.files.wordpress.com/2010/03/fasciculo4.pdf
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:13 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

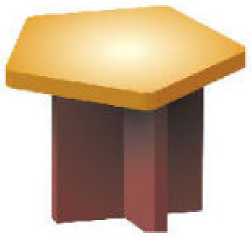
Lección 10: Diseños geométricos

Lo que sabes

1. Analicen las siguientes situaciones y contesten.

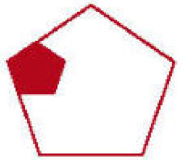
a) En el restaurante de Ernesto hay mesas cuya superficie es como se muestra en las imágenes. En cierta ocasión cambió de lugar una de esas mesas.

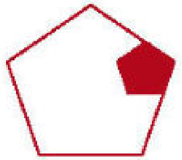
- ¿Cuántos grados se debe girar cada mesa para que queden en la misma posición? Argumenten su respuesta. __________


__________ __________ __________

b) Analicen la rotación que se hizo con una de las mesas de Ernesto y contesten.


A


B

- ¿Cuántos grados se giró la mesa A para obtener la mesa B? __________
- ¿Cuántos grados se debe girar la figura A para que la imagen quede en la misma posición? __________

  Argumenten su respuesta. __________

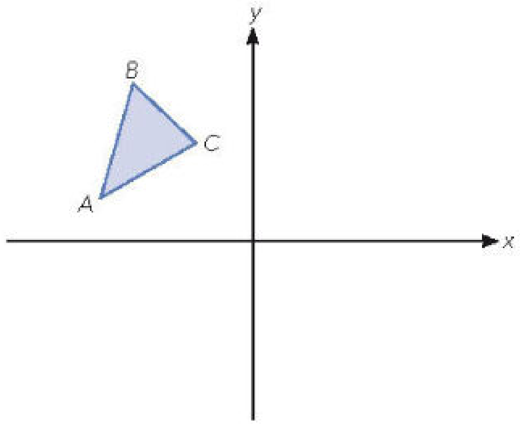
- Comparen sus respuestas con las de otra pareja. En caso de que haya diferencias, justifíquenlas.
- Con la ayuda de su profesor concluyan sobre los movimientos de rotación realizados.

Actividades

1. Analicen la siguiente situación y contesten.

a) El restaurante de Ernesto está dividido en cuatro secciones, como se muestra en la imagen.

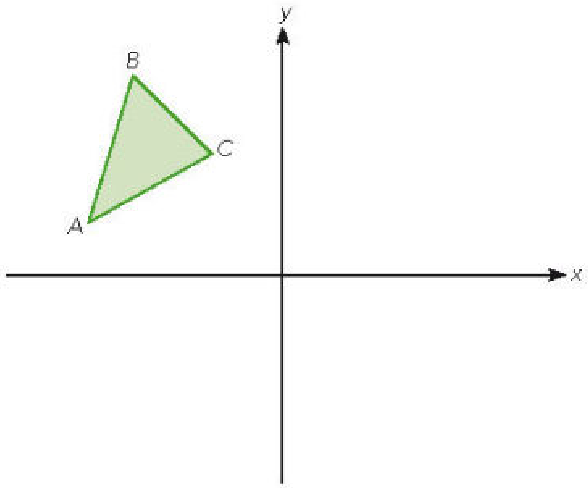
- El eje *y* es una pared. Ernesto lo considera como eje de simetría, ¿cómo debe acomodar la mesa $A'B'C'$ para que sea simétrica a la mesa ABC? (Realicen el dibujo en el plano)
- Si el eje *x* es otra pared del restaurante, ¿cómo debe acomodar la mesa $A''B''C''$ para que sea simétrica a la mesa $A'B'C'$? (Realicen el dibujo en el plano).



- Argumenten si sucedería lo mismo si primero toman como eje de simetría al eje *x* y después al eje *y*.

____

- Realicen en el siguiente espacio los trazos correspondientes.

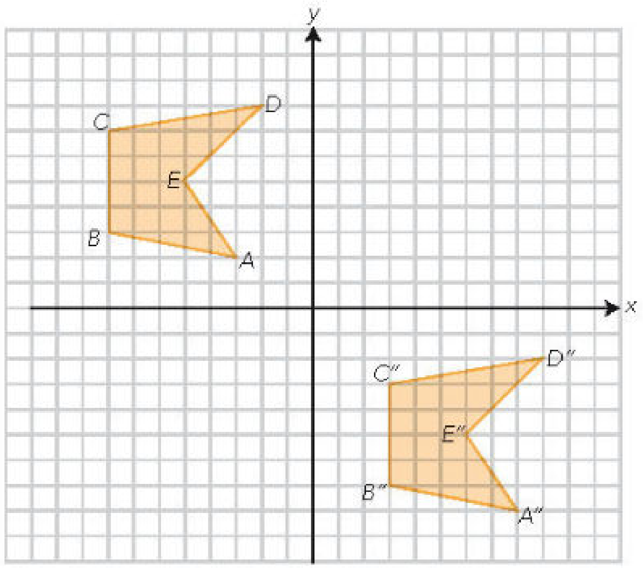


- Comenten mediante qué movimiento podrían obtener la figura $A''B''C''$, directamente de la figura ABC.
- Comparen su respuesta y sus trazos con los de otro equipo y, orientados por su profesor, escriban las conclusiones. __________

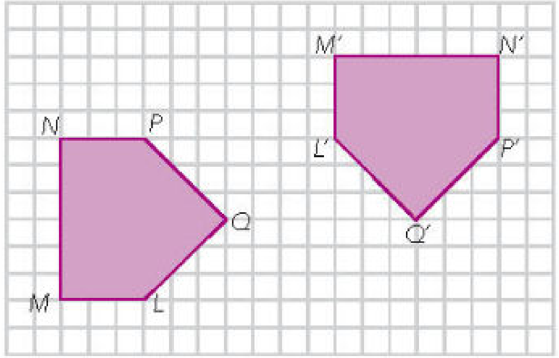
____

b) Supongan que el polígono *ABCDE* es otra de las mesas de Ernesto. Realicen lo que se indica en cada caso.

- Escriban las coordenadas de cada punto de la figura *ABCDE*. ______
- Escriban las coordenadas de cada punto de la figura *A″B″C″D″E″*. ______
- ¿Qué movimientos se hicieron para obtener la figura *A″B″C″D″E″*? ______
- Trácenlos en el plano cartesiano. ______



c) Analicen los siguientes dibujos y contesten.

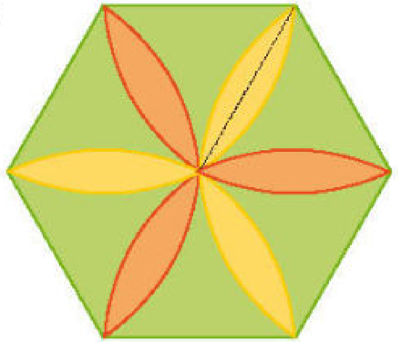


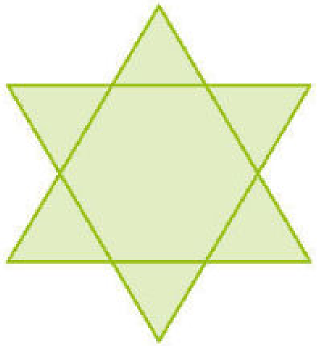
- ¿Qué tipo de transformación sufrió la figura *LMNPQ* para obtener la figura *L′M′N′P′Q′*? ______
- Argumenten el procedimiento que siguieron para llegar a esta respuesta, compártanla con otro equipo y, orientados por su profesor, escriban las conclusiones acerca de los movimientos que se pueden realizar a una figura en un plano y los resultados que se obtienen con dichos movimientos.

Actividades

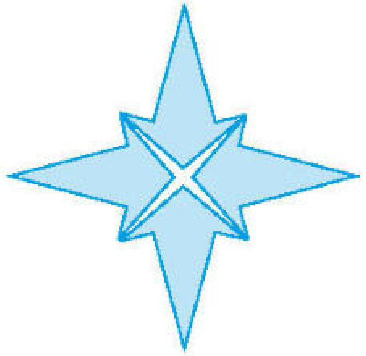
1. Las transformaciones geométricas tienen importantísimas aplicaciones en el diseño gráfico. A un diseñador le han encargado reproducir las siguientes imágenes, escriban sobre la línea el tipo de transformación que le debe aplicar a cada figura para reproducirla. Argumenten, oralmente, sus respuestas.

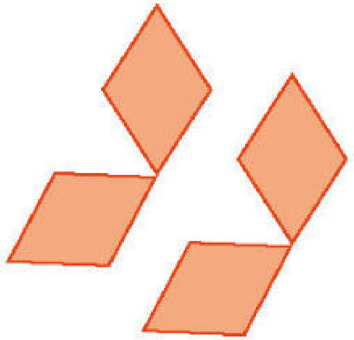
a) 

b) 

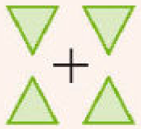
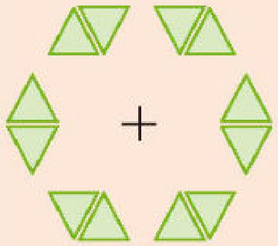
c) 

d) 

e) 

f) 

2. Partiendo de la imagen (**motivo generador**), diseña en tu cuaderno, un mosaico mediante el uso de rotaciones, traslaciones o simetrías axiales. Analiza el ejemplo:

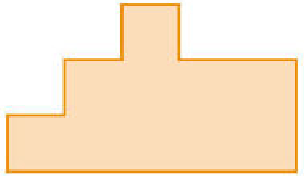
A partir de	Se puede realizar:		
 Motivo generador	 Simetría axial	 Rotación de 180° $(180° = \frac{360°}{2})$	 Rotación de 60° $(60° = \frac{360°}{6})$

- Compara tu mosaico con el que elaboraron tus compañeros. Compartan sus procedimientos y, con la ayuda de su profesor, lleguen a conclusiones generales.

Glosario

Motivo generador. Es una figura geométrica que sirve como base y se repite las veces que se desee por medio de rotaciones, traslaciones o simetrías axiales.

3. Analiza el siguiente planteamiento y realiza lo que se indica.
   a) Amalia está armando un rompecabezas. Curiosamente observa que hay cuatro piezas idénticas a la que se muestra en la imagen (esta imagen recibe el nombre de Poliminó).



- Traza en tu cuaderno cuatro de estas piezas, del mismo tamaño, usando diferentes colores.
- Arma un rectángulo con estas piezas.
- Escribe qué tipo de transformaciones están contenidas en el rectángulo que formaste. ______
  Argumenta tu respuesta. ______
- Compara el rectángulo que realizaste y tu respuesta con los que realizaron otros compañeros. En caso de que existan diferencias, justifíquenlas.

4. El rectángulo que formaron es una manera de cubrir el plano, con ayuda de su profesor concluyan sobre las transformaciones que se le pueden realizar a una figura para cubrir el plano.

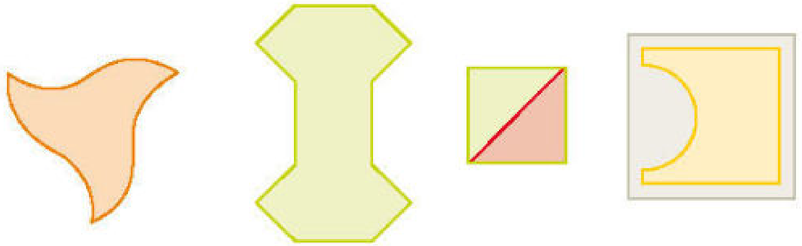
Notas importantes

Considera esta información para complementar tus ideas.

La geometría estudia las figuras, sus propiedades y sus movimientos. Cuando te deslizas en una patineta, te observas en un espejo o te subes a la rueda de la fortuna, se realizan movimientos físicos en los que la persona o el objeto que se desliza, gira o se voltea no cambia ni de forma ni de tamaño. Esos movimientos inducen en la geometría el estudio de las transformaciones de figuras. *Traslación, rotación y reflexión* de figuras son movimientos estudiados por la geometría. La geometría describe los movimientos al estudiar la correspondencia entre los puntos de la figura original y los puntos de la nueva figura o imagen.

Lo que aprendí

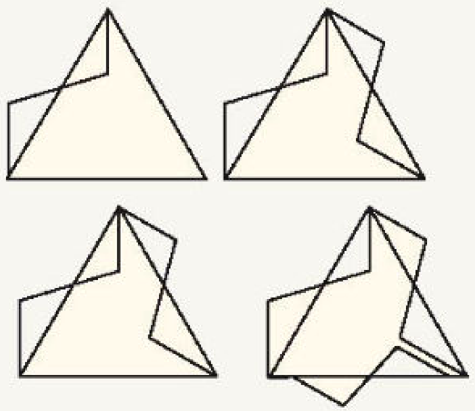
1. Jaime quiere hacer un mosaico con alguna de las figuras que se muestran enseguida, por medio de rotaciones, traslaciones o simetrías.
   a) Elijan alguna de ellas y realicen un mosaico en una superficie plana.

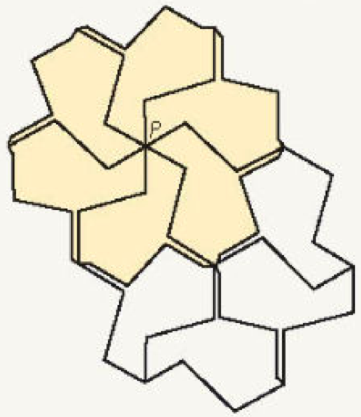


   b) Compartan sus trabajos con los de otros compañeros. Elijan los mejores y, con la ayuda de su profesor, monten una exposición.

Desafío

1. Realiza las modificaciones que se sugieren en las imágenes correspondientes a un triángulo equilátero y tesela el plano como se muestra en la imagen. Puedes usar colores diferentes.
   a) Coordinados por su profesor, compartan sus **teselaciones** y agréguenlas a la exposición.





Glosario

Teselación. Regularidad o patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana sin que queden huecos y sin que se superpongan las figuras.

Enlázate

Para profundizar en el estudio de mosaicos generados por simetrías o por rotaciones, te invitamos a que consultes la siguiente página electrónica. En ella podrás ver algunos ejemplos de cómo se generan mosaicos a partir de una figura, llamada motivo, es decir, una pieza teórica, lo más pequeña posible. Realicen algún movimiento de los que sugieren y, con el apoyo de su profesor, agreguen sus trabajos a la exposición.

http://agrega.juntadeandalucia.es/repositorio/24042013/81/es-an_2013042412_9083039/NDOIAND-20070912-0070/inicio.html. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 13:56 horas.)

Horizonte cultural

Las simetrías han sido utilizadas desde la antigüedad por diversas civilizaciones. Los sumerios fueron particularmente aficionados a la simetría bilateral. De esto hay gran variedad de ejemplos.

Para H. Weyl "La simetría, independientemente de la amplitud con que se defina su significado, es una idea por medio de la cual el hombre, a través de los tiempos, ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección".

También nuestras poblaciones indígenas se valen de la simetría para la decoración de diversos objetos, como las cestas. La imagen nos da un excelente ejemplo de ello.

Fig. 2.2 Ejemplo de simetría bilateral.

Investiga sobre otros diseños en los que se utilicen movimientos de traslación, rotación o simetría bilateral. Intercambia la información con tus compañeros, junto con el profesor, analiza lo que encontraron.

FUENTE: Fundación Polar, Matemática para todos, Fascículo 4, "El mundo de los movimientos y de las simetrías", Geometría https://matematicasmartinrivero.files.wordpress.com/2010/03/fasciculo4.pdf. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:08 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Lección 11: Relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

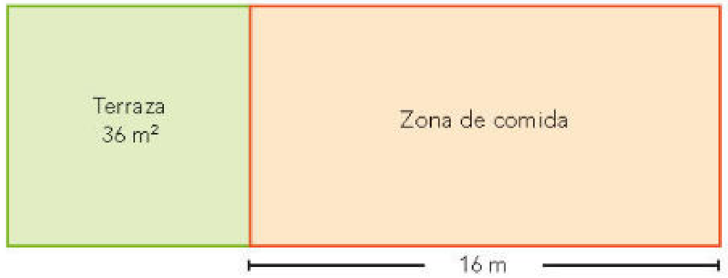
Lo que sabes

1. Resuelve los siguientes planteamientos.

a) Se están diseñando algunos anuncios para una zona habitacional en forma de un triángulo, como el siguiente.

- Si cada uno tiene una superficie de 16 cm², ¿cuál es la medida de su altura? ______
- Escribe el procedimiento que realizaste. ______

b) En una cafetería se proyecta hacer dos secciones como las siguientes.



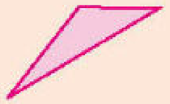
- ¿Cuántos metros cuadrados ocupa la zona de comida? ______
- Argumenta sobre la forma de determinar la medida por lado del cuadrado que ocupa la terraza. ______
- Describe el procedimiento que llevaste a cabo para determinar el área destinada para comida. ______

c) Comparen sus respuestas, expliquen sus procedimientos y, con la orientación de su profesor, determinen si hay uno o más procedimientos de solución. Tomen nota en su cuaderno sobre otras formas de resolver los problemas anteriores.

Actividades

1. Completen los siguientes cuadros considerando la clasificación de triángulos, investiguen sobre los conceptos que tengan dudas.

Nombre según sus lados	Características	Trazo
Triángulo equilátero		
		
	Ningún lado es igual a otro	

Nombre según sus lados	Características	Trazo
	Todos sus ángulos son agudos	
		
Triángulo rectángulo		

a) Analicen las características y argumenten si es posible o no la construcción de los siguientes triángulos integrando sus características. Realicen los trazos en su cuaderno.

- Un triángulo isósceles y acutángulo. ______
- Un triángulo isósceles y rectángulo. ______
- Un triángulo rectángulo y escaleno. ______
- Un triángulo rectángulo y equilátero. ______

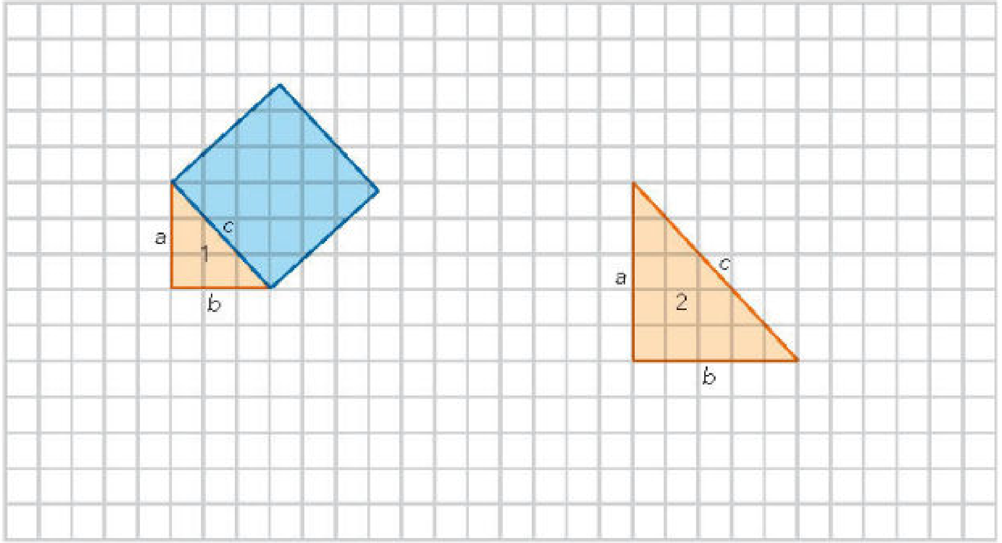
b) Hagan otras combinaciones, y en su cuaderno tracen uno que cumpla con las características que ustedes determinaron.

c) Comenten con otras parejas sus respuestas, expónganlas al grupo y, con el apoyo de su profesor, discutan si cumplen o no con las características indicadas. Copien en su cuaderno dos que sean distintas a lo que respondieron.

Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.

a) En el taller de costura se bordarán servilletas con diseños de triángulos y cuadrados. Inicialmente se bordan de la siguiente manera.

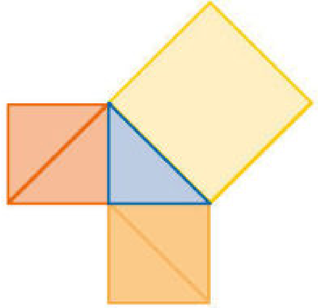


- Tracen los cuadrados que corresponden al bordado sobre cada uno de los lados de los triángulos de la imagen anterior.
- ¿Qué tipo de triángulos son? ______
- Considerando cada cuadrito como unidad de medida, completen la tabla.

Lado	Triángulo 1		Triángulo 2	
	Medida	Área del cuadrado	Medida	Área del cuadrado
a				
b				
c				

- Expliquen de qué manera obtuvieron la media de *c* en ambos triángulos. ______
- ¿Qué relación hay entre las medidas de los cuadrados construidos en los lados que forman el ángulo recto y el construido en el lado mayor del triángulo? ______
- Argumenten su respuesta. ______

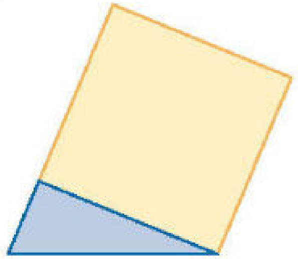
b) En su cuaderno tracen un triángulo semejante a los anteriores con los cuadrados sobre sus lados. En los cuadrados pequeños tracen una diagonal (analicen el ejemplo).



c) Recorten los triángulos que se forman en los cuadrados y con ellos comprueben si se cubre o no el área del cuadrado mayor. Peguen los recortes en su cuaderno.

d) Argumenten la relación que tiene esta situación con lo que encontraron al medir los lados y calcular las áreas de los cuadrados. ______

e) Considerando la siguiente imagen, construyan sobre los otros lados del triángulo un cuadrado.



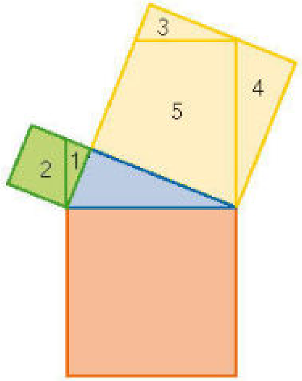
f) Midan cada uno de los lados. Indiquen la medida y escríbanla dentro de cada cuadrado su área.

g) Describan la forma en que lograron construir los cuadrados. ______

h) Analicen la áreas obtenidas y contesten:

- ¿Qué tipo de triángulo se tiene? ______
- ¿Qué relación pueden encontrar entre las áreas de los cuadrados? ______

i) Tracen en una hoja blanca una figura y marquen los trazos, como se muestra en la imagen de la derecha.



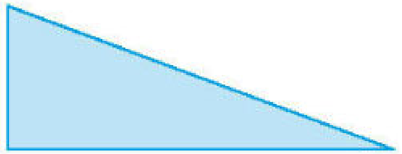
j) Recorten las piezas numeradas y con ellas formen el cuadrado mayor. Peguen la figura obtenida en su cuaderno.

k) Comparen su logro con el de otras parejas. Analicen si pudieron o no formar el cuadrado mayor con las piezas numeradas. En caso de que no lo hayan logrado, averigüen por qué.

l) Argumenten si se cumple la relación que encontraron comparando las áreas de los cuadrados al utilizar los recortes. ______

m) Expongan al grupo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que obtuvieron y, con la orientación de su profesor, elaboren una conclusión; escríbanla. ______

n) Reproduzcan el siguiente triángulo en una hoja blanca. Realicen el trazo de los cuadrados para cada lado, midan y calculen sus áreas.



- ¿Se cumple la misma relación que en los triángulos anteriores? ______

  Argumenten su respuesta. ______
- ¿Qué tipo de triángulo es el anterior? ______

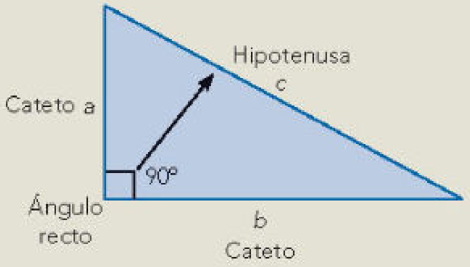
o) Con el apoyo de su profesor, analicen las distintas propuestas y unifíquenlas. Escriban la conclusión grupal acerca de la relación que hay entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. ______

Notas importantes

Consideren la siguiente información para complementar sus ideas y sus respuestas.

En un triángulo rectángulo los lados que forman al ángulo recto reciben el nombre de catetos. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

De manera general, los lados del triángulo se denotan con letras minúsculas. Para el triángulo rectángulo comúnmente se asignan a *a* y *b* para los catetos, y *c* para la hipotenusa, aunque pueden usarse indistintamente en la aplicación y solución de ejercicios.

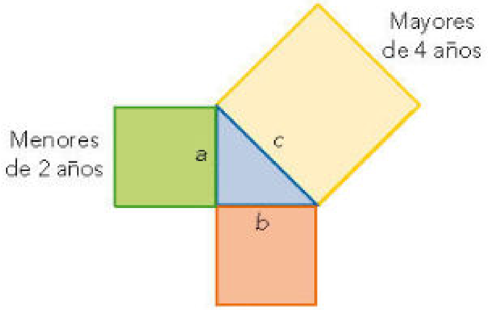


Es importante considerar que en un triángulo rectángulo generalmente se marca con un recuadro la ubicación del ángulo recto.

Actividades

1. Con base en las conclusiones anteriores, analicen lo siguiente y realicen lo que se indica.

   a) Las áreas de juegos en una guardería están distribuidas de la siguiente forma.



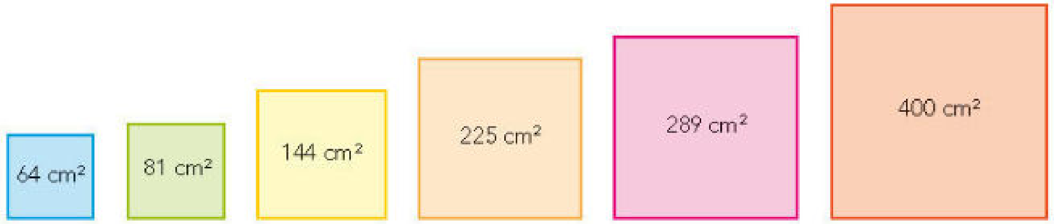
   b) Si las dimensiones del triángulo están representadas con *a*, *b* y *c*.

   - ¿Cuáles son las expresiones algebraicas que representan el área de cada cuadrado? Escríbanlas dentro de cada uno.
   - ¿Qué expresión algebraica representa la relación de igualdad entre los cuadrados? ______
   - ¿Cómo se expresa esta igualdad, en lenguaje común, considerando los nombres que reciben los lados de un triángulo rectángulo? ______
   - ¿Cómo expresarían una igualdad con el cuadrado de *c*? ______
   - ¿Y con el de *b*? ______
   - Expongan al grupo sus respuestas. Con la orientación de su profesor, nombren a esta relación de igualdad teorema *de Pitágoras* y lleguen a una conclusión para escribirla. ______

Lo que aprendí

1. Analiza los siguientes planteamientos y contesta las preguntas.

   a) Andrés y Braulio tienen los siguientes cuadrados. Ellos quieren colocar los cuadrados a los lados de dos triángulos rectángulos. ¿Cuáles son los cuadrados que corresponden a cada triángulo?



   b) En tu cuaderno, traza un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 cm y 12 cm, respectivamente.
   - Si se construye un cuadrado en su hipotenusa, ¿cuál será su área? ______
   - Justifica tu respuesta. ______

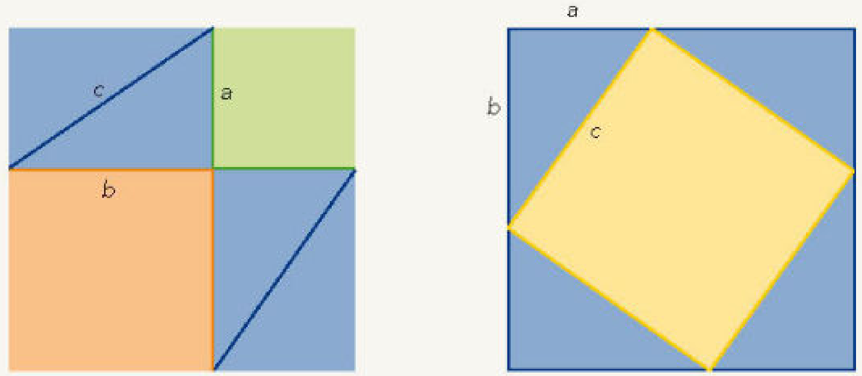
   c) El área del cuadrado construido en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 225 cm^2. Si uno de sus catetos tiene una longitud de 9 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado construido en el otro cateto?

   d) Describe el procedimiento que seguiste para resolver el problema. ______

2. Con el apoyo de tu profesor, comenta en grupo tus respuestas, procedimientos y planteen otras situaciones en las que se utilice el teorema de Pitágoras.

Desafío

1. Un juego de rompecabezas presenta dos modelos distintos. La imagen muestra cómo están distribuidas las piezas: los triángulos azules son iguales en ambos cuadrados, y se le han colocado las letras *a*, *b* y *c* para expresar sus dimensiones. Analicen si se cumple o no la siguiente igualdad: $c^2 = a^2 + b^2$



2. Con la dirección de su profesor, discutan en grupo sus argumentos y unifíquenlos. Escriban sus conclusiones.

Enlázate

Para acrecentar tus conocimientos sobre este tema, consulta las siguientes páginas y analiza otras formas de demostrar el teorema de Pitágoras.

a) En esta dirección electrónica encontrarás diferentes formas de demostrar el teorema de Pitágoras. Explora las posibilidades y elige alguna forma de reproducir la comprobación de una de ellas.

Con la orientación de tu profesor, exponlas para que compruebes este teorema. http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm. (Consulta: 15 de mayo de 2013 a las 4:15 p.m.)

b) Aquí tendrás la oportunidad de analizar otras formas de demostrar el teorema. Explora todas las posibilidades para que tu exposición sea más completa. http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html. (Consulta: 19 de abril de 2013 a las 11:33 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Lección 12: Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Lo que sabes

1. Realiza la siguiente actividad.

Reproduce en una hoja blanca los cuadrados que se muestran a continuación.

a) Recórtalos y pégalos en tu cuaderno, de manera que coincidan en un vértice y formen sus lados un ángulo recto.

b) Traza una línea de manera que se forme un triángulo rectángulo.

c) Construye un cuadrado sobre el lado que falta del triángulo.

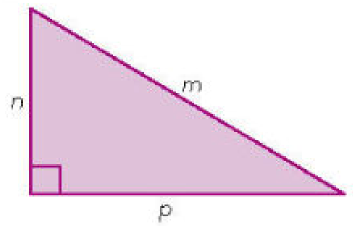
d) Contesta las preguntas.

- ¿Qué nombre recibe el lado que trazaste del triángulo? __________
- ¿Cómo se les llama a los otros dos lados del triángulo? __________
- Asigna una literal como medida para cada lado del triángulo y escríbela sobre el lado que corresponda en la figura que formaste.
- Escribe dentro de cada cuadrado la expresión que corresponda a su área.
- De acuerdo con las expresiones que anotaste, escribe la expresión que indica la igualdad entre el cuadrado mayor y los otros dos. __________
- ¿Cómo se le llama a esta relación? __________
- Escríbela en lenguaje común. __________
- Asigna medidas a los lados del triángulo y comprueba numéricamente que se cumple la igualdad. Desarrolla el procedimiento en tu cuaderno.
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenten en caso de tener diferencias. Con la orientación de su profesor, analicen el significado de la igualdad de este teorema.

Actividades

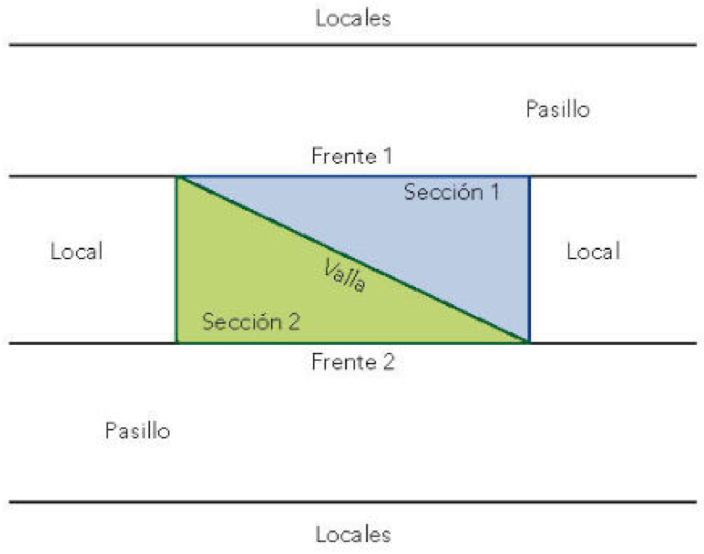
1. Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.

a) Se tiene un triángulo como el siguiente.



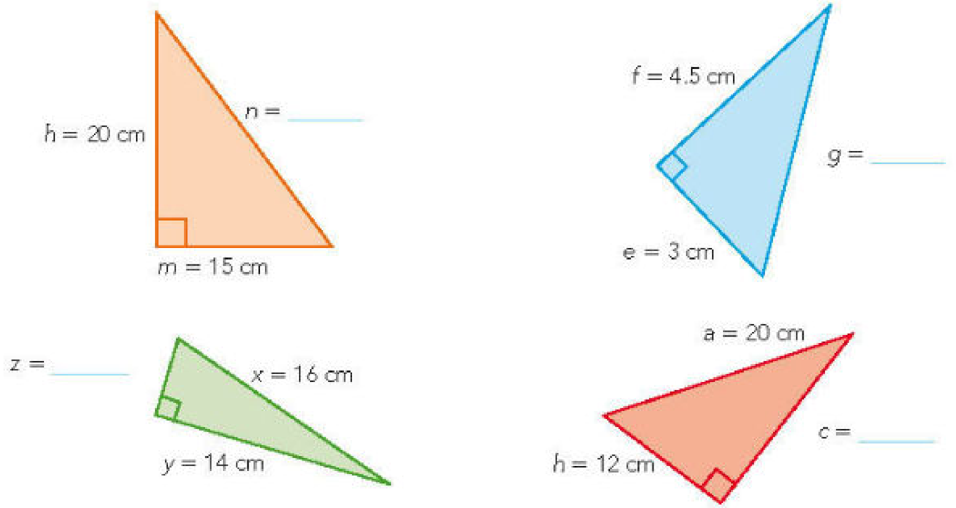
- ¿Con qué letra se indica la hipotenusa? __________
- ¿Y los catetos? __________
- Si se construyeran cuadrados sobre el lado donde $p = 8$ cm, ¿cuál sería el área de este cuadrado? __________
- Y si $n = 6$ cm, ¿cuál sería el área de este cuadrado? __________
- Considerando las medidas y áreas anteriores, ¿cuál sería el área del cuadrado de m? __________
  Argumenta tu respuesta. __________
- Si se conoce el área del cuadrado de m, ¿cuál es la longitud del lado m? __________
- Describan el procedimiento con el que obtuvieron la medida de m. __________
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y argumenten sobre los procedimientos que utilizaron. Con el apoyo de su profesor, coméntenlos al grupo y escriban en su cuaderno los que sean diferentes.

b) Un local comercial tiene vista hacia los lados más largos y se dividirá en dos secciones colocando una valla de manera diagonal. Considera la siguiente imagen, que representa la situación.



- En los triángulos formados, ¿cómo se llama el lado indicado con la valla? ______
- Si la valla tiene una longitud de 15 m y cada frente 12 m, ¿es útil el teorema de Pitágoras para calcular la medida del ancho del local? ______ ¿Por qué? ______
- Escriban la igualdad que representa el teorema de Pitágoras para el triángulo formado. Asignen las letras que consideren para formular la expresión correspondiente. ______
- Escriban en el siguiente recuadro el procedimiento a seguir para obtener el valor que corresponde a la longitud del ancho del local.
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y justifíquenlas en caso de que encuentren diferencias.

2. Reflexionen sobre la forma en que pueden utilizar el teorema de Pitágoras en los problemas anteriores. Discútanlo en grupo y, con la orientación de su profesor, escriban una conclusión acerca de:
   - ¿Cómo se utiliza el teorema de Pitágoras cuando se desconoce el valor de la hipotenusa?
   - ¿Cómo se utiliza el teorema de Pitágoras cuando se desconoce el valor de uno de los catetos?
   - Considerando las conclusiones a las que llegaron anteriormente, obtengan la medida que falta en cada uno de los triángulos siguientes. Realicen los cálculos en su cuaderno.

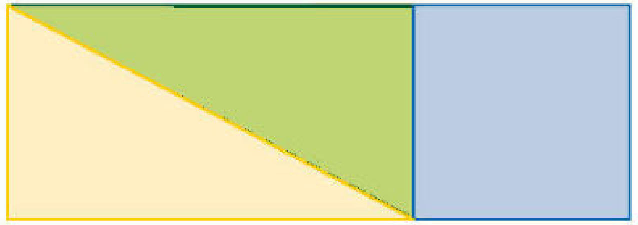


3. Con el apoyo de su profesor, compartan sus respuestas con el grupo y analicen los procedimientos utilizados. Justifiquen lo que realizaron y corrijan si es necesario.

Actividades

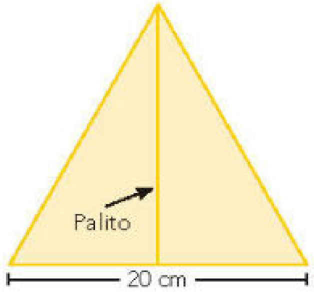
1. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Para pintar la pared de un museo se creó un diseño como el siguiente.



- Si la diagonal indicada tiene una longitud de 18 m y el largo del rectángulo son 15 m, ¿cuál es la longitud total de la base de la pared, si la zona azul es cuadrada? ______ Escriban su procedimiento en el cuaderno.

b) Se necesitan hacer unos banderines y colocarlos en un hilo para indicar la venta de una casa. Se quieren confeccionar de manera que sean triángulos equiláteros. Para evitar que se doblen se les colocará un palito en el lugar correspondiente a la altura, como se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es la longitud del palito? ______ Escriban su procedimiento en el cuaderno.

c) Un terreno rectangular de 3 m por 4 m se dividirá diagonalmente con una cerca. ¿Cuál es la longitud de la cerca? ______

- En el siguiente recuadro realicen un dibujo o esquema que represente esta situación y escriban su procedimiento.

d) Para sostener una antena de televisión, se ataron al poste que la sostiene 3 cables a una altura de 5 metros, si los cables se atan al piso a 4 m de la base, ¿cuánto cable se utilizó? ____________

- En su cuaderno, realicen un dibujo o esquema que represente esta situación y su procedimiento.

e) Comparen los esquemas o dibujos realizados y analicen si cumplen o no con las condiciones de los problemas. Coméntenlo en grupo y, con el apoyo de su profesor, escriban las características que deben tener para representar un problema que se pueda resolver utilizando el teorema de Pitágoras.

____

____

____

f) Expongan sus respuestas y procedimientos al grupo. Justifiquen lo que realizaron, y corrijan en caso de ser necesario. Con la orientación de su profesor analicen si hay procedimientos distintos que lleven a los mismos resultados.

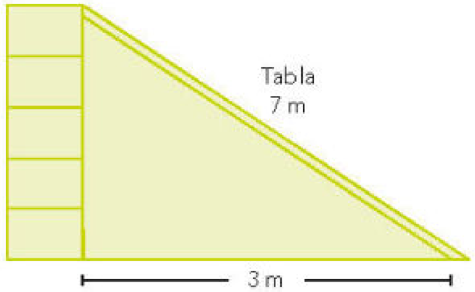
2. Investiguen otros tres problemas de aplicación del teorema de Pitágoras. Escríbanlos en su cuaderno.

a) Con el apoyo de su profesor, coméntenlos al grupo y escriban en el siguiente recuadro el que les parezca más interesante y resuélvanlo.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) Para una competencia de patinetas se coloca una tabla sobre una estructura, como se muestra en la imagen. ¿Qué altura tiene la estructura? ____________



- Escribe el procedimiento en el siguiente recuadro.

b) Un edificio de 60 m de altura proyecta una sombra de 50 m. ¿Cuál es la distancia desde la parte superior del edificio hasta el punto en que llega su sombra en ese momento?

- En el siguiente recuadro realiza un dibujo o esquema que represente la situación y escribe el procedimiento.

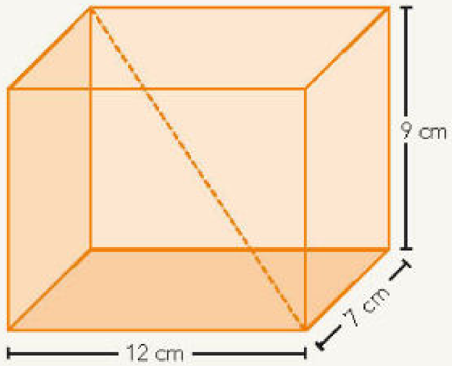
c) Si el perímetro de un rombo es de 160 mm y su diagonal menor mide 48 mm, ¿cuál es la medida de la diagonal mayor? ____________

- En tu cuaderno realiza un dibujo o esquema que represente esta situación y escribe el procedimiento.

2. Compara con dos o tres compañeros tus respuestas y, con la orientación de tu profesor, reflexionen sobre la utilidad práctica del teorema de Pitágoras.

Desafío

1. Analiza el siguiente esquema que representa una caja.



a) Obtén la medida de la diagonal interior señalada.

____

b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y justifica tu respuesta. Con el apoyo del profesor, analicen los procedimientos aplicados y validen los resultados presentados.

Enlázate

Consulta en las siguientes páginas el tema del teorema de Pitágoras y resuelve las actividades propuestas.

a) www.thatquiz.org/es/. (Consulta: 28 de noviembre de 2012 a las 10:41 a.m.) En la columna de geometría, elegir triángulos y después señalar a Pitágoras.

b) http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U07_L2_T1_text_final_es.html. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 2:22 p.m.)

- Exploren las páginas recomendadas y reafirmen sus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras.
- Seleccionen al menos dos que les parezcan más interesantes. Escríbanlas en su cuaderno y, con el apoyo de su profesor, expónganlos al grupo. Analicen las situaciones y escriban en su cuaderno algún problema o situación que les parezca más representativo de este tema.

Horizonte cultural

Considera la siguiente información para incrementar tu conocimiento acerca del teorema de Pitágoras. De ser posible, investiga otros datos y compártelos con tus compañeros

Pitágoras

Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático griego, famoso sobre todo por el teorema que lleva su nombre.

El teorema de Pitágoras dice que "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Curiosidades sobre el teorema:

- Cuando Pitágoras lo descubrió por primera vez, celebró, según se dice, mediante el sacrificio de un centenar de bueyes; un método muy peculiar de honrar a la ciencia.
- El teorema de Pitágoras ha merecido la atención de muchos matemáticos, especialmente de la Antigüedad. Actualmente están registradas unas 370 demostraciones de este teorema.
- Se ha insinuado con bastante frecuencia que el teorema de Pitágoras no es deducción del gran matemático y fundador de la escuela del mismo nombre. La opinión más generalizada es que un miembro de su escuela formuló por primera vez el teorema en una época muy posterior.
- En el mismo tiempo que vivió Pitágoras, siglo VI a.n.e., un matemático chino de nombre desconocido debió haber llegado a la misma conclusión. En el *Chou Pei Suan Ching*, libro matemático-filosófico, se encuentra una descripción que presenta dibujado, sin ningún género de dudas, un triángulo pitagórico con sus correspondientes relaciones.

FUENTE: http://simetria.dim.uchile.cl/matematica/nodo614.html. https://www.canaldeciencias.com/2013/09/01/pit%C3%A1goras-el-primero-de-los-griegos/. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:30 horas.)

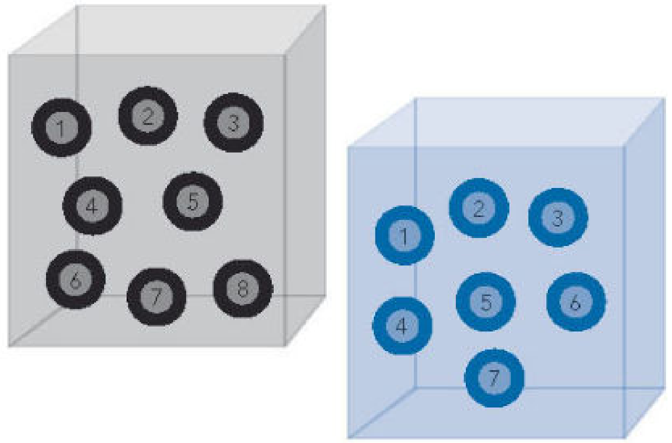
Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Lección 13: Probabilidad, regla de la suma

Lo que sabes

1. Lee con atención las siguientes situaciones y contestas las preguntas.

a) Se tienen dos cajas con fichas como las de la imagen; Alberto, Ana y Jesús juegan a extraer dos fichas, una de cada caja. Suman sus puntos y regresan las fichas a la caja correspondiente. Cada quien propuso un evento con el que piensan que ganarán. Los eventos son los siguientes:



Alberto: "Obtener como suma un número múltiplo de 4".

Ana: "Obtener como suma un número impar".

Jesús: "Obtener como suma un número menor a 15".

- ¿Cuáles son los casos favorables de cada evento?

Alberto. ______

Ana. ______

Jesús. ______

- De los eventos anteriores, ¿cuáles son mutuamente excluyentes? ______
- ¿Cuál es el evento complementario al evento de Alberto? ______
- Ana dice que un evento complementario al suyo es "obtener como suma un múltiplo de 3". Explica si ella tiene o no razón. ______
- Escribe un evento que sea mutuamente excluyente al de Jesús. ______
- ¿Cuáles son los eventos mutuamente excluyentes? ______
- ¿Cuáles son los eventos complementarios? ______

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexiona sobre las diferencias que hayas encontrado. Con la orientación de su profesor comuniquen las respuestas correctas, en especial, cuáles fueron los eventos mutuamente excluyentes y los complementarios.

Actividades

1. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Braulio y Ximena juegan a lanzar un dado. Él gana si cae un número mayor a 3. Ella gana si cae 2.

- ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? ___
- ¿Cuáles son los casos favorables para cada uno de ellos? Braulio. ___ Ximena. ___
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Braulio? ___ ¿Cómo se determinó la probabilidad de este evento? ___
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Ximena? ___
- Expliquen si estos dos eventos son o no mutuamente excluyentes. ___

b) En una bolsa hay 7 tarjetas verdes; nueve azules y cuatro negras. Andrés apuesta a que se extraerá una azul, Johana que saldrá la verde y Diego apuesta por la negra.

- ¿Cuál de estos tres eventos tiene una probabilidad del 20%? ___
- ¿Cuál de estos eventos tiene probabilidad de $\frac{7}{20}$? ___
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer una tarjeta azul? ___
- Expliquen si estos eventos son o no mutuamente excluyentes. ___
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y justifíquenlas. Además, reflexionen sobre cómo se determina la probabilidad de un evento. De manera grupal, y con orientación de su profesor, lleguen a una conclusión y escríbanla. ___

Actividades

1. De acuerdo con el siguiente experimento, contesta las preguntas que se plantean.

a) En una urna se tienen 30 esferas enumeradas del 1 al 30. Según los siguientes eventos, determinen la probabilidad que se les solicita.

Evento A: Extraer un múltiplo de 7.

Evento B: Extraer una esfera con un número par menor a 10.

Evento C: Extraer una esfera con número múltiplo de 3 mayor a 15.

Evento D: Extraer una esfera con un número par, igual o mayor a 9.

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer de la urna una esfera con número múltiplo de 7? ___
- ¿Y de extraer un número que sea un par menor a 10? ___
- Expliquen por qué estos dos eventos son o no mutuamente excluyentes. ___

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer una esfera con un número múltiplo de 7 o uno que sea menor a 10? ___
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer una esfera con un número par igual o mayor a 9 o un múltiplo de 3 menor a 15? ___
- Los eventos C y D, ¿por qué son o no mutuamente excluyentes? ___
- Determinen $P(B,D)$, es decir, determinen la probabilidad de B o D. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número par menor a 10 o uno par igual o mayor a 9? ___
- Los eventos B y D, además de ser complementarios, ¿son o no mutuamente excluyentes? ___
- Si B y D son mutuamente excluyentes, determinen $P(B,C)$. ___

b) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Discutan, ¿cómo se determina la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes? ___

c) De manera grupal, y con la ayuda de su profesor, concluyan sobre la manera que debe calcularse la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes. Escriban la conclusión. ___

2. De acuerdo con el siguiente experimento, y con los siguientes eventos, calculen la probabilidad que se les solicita.

a) Se lanzan dos dados y se suman los puntos que se obtienen en ambos dados.

Evento A: "Que la suma sea un múltiplo de 5".

Evento B: "Que la suma sea mayor a 10".

Evento C: "Que la suma sea menor a 6".

Evento D: "Que la suma sea un múltiplo de 8".

- $P(A,B)$. ___
- $P(C,B)$. ___
- $P(C,D)$. ___
- $P(A,D)$. ___
- $P(B,D)$. ___

Actividades

1. De acuerdo con los eventos del experimento de la actividad anterior, escriban sobre la línea su evento complementario E^c.

a) Evento A: "Que la suma sea un múltiplo de 5".
Evento A^c. ___

b) Evento B: "Que la suma sea mayor a 10".
Evento B^c. ___

c) Evento C: "Que la suma sea menor a 6".
Evento C^c. ___

d) Evento D: "Que la suma sea un múltiplo de 8".
Evento D^c. ___

- Comparen sus respuestas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Orientados por su profesor, concluyan y comuniquen las respuestas correctas.

2. Determinen la probabilidad de los eventos que se les solicite.

a) Determinen $P(A \cup A^c)$, es decir, la probabilidad de que ocurra A o A^c. ___

b) $P(B \cup B^c)$. ___

c) $P(C \cup C^c)$. ___

d) $P(D \cup D^c)$. ___

e) Comparen sus respuestas, justifíquenlas. Reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado y contesten las preguntas.

- ¿Cómo determinaron la probabilidad de dos eventos complementarios? ___
- ¿Cómo pueden determinar si la probabilidad de dos eventos complementarios es correcta o no? ___

3. De manera grupal, y con la orientación de su profesor, concluyan sobre cómo se determina la probabilidad de dos eventos complementarios. Escriban la conclusión. ___

Lo que aprendí

1. Lee el siguiente experimento y determina la probabilidad de los eventos que se solicitan.

a) Ricardo, Juana, Salvador y Carmen, depositaron dentro de una bolsa negra 40 cartas: 10 amarillas, 10 rojas, 10 azules y 10 verdes. Las cartas están enumeradas del 1 al 10 por cada color. Para participar en el juego, cada una de ellos debe elegir dos eventos que sean mutuamente excluyentes. El que obtenga la mayor probabilidad de sus eventos ganará el juego.

Evento A: "Extraer una ficha con el número 10".

Evento B: "Extraer una ficha de cualquier color menor a 5".

Evento C: "Extraer una ficha roja mayor a 6 y que no sea el 9 o el 10".

Evento D: "Extraer el 8, ya sea de color verde o azul".

Evento E: "Extraer cualquier ficha amarilla".

b) Ricardo escogió $P(A,C)$; Juana $P(B,D)$; Salvador $P(B,C)$ y Carmen $P(D,E)$. De acuerdo con lo anterior:

- ¿Quién de ellos tienen mayor probabilidad de ganar? ___
- ¿Quién de los cuatro no eligió eventos mutuamente excluyentes? ___
- Si sólo compiten Salvador y Juana, ¿quién de los dos ganará? ___
- Rosa quiere participar con $P(B,E)$. Explica si ella cumple o no con la regla para participar. ___
- Martín apuesta por $P(E \cup E^c)$. Explica si podrá o no ganarles a los demás. ___

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Justifíquenlas y reflexionen sobre las diferencias obtenidas. Con la orientación de su profesor, determinen las respuestas correctas y comuníquenlas.

Desafío

1. En una fábrica de focos se tienen tres máquinas. En la máquina A, de 50 focos que produce por minuto, 4 salen defectuosos. La B produce 5 focos defectuosos, de los 80 que produce por minuto. La C produce 54 focos en buen estado de los 60 que produce por minuto; los focos de las tres máquinas salen a la misma banda que los lleva a la sala de pruebas.

a) En la sala de pruebas se toma un foco. ¿Cuál es la probabilidad de que este foco sea defectuoso? ___

b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Justifíquenlas y reflexionen sobre las diferencias obtenidas. Con la orientación de su profesor, determinen las respuestas correctas y comuníquenlas.

Notas importantes

Para complementar tus ideas, lee la siguiente información.

La probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes se obtiene con "La regla de la suma", que consiste en sumar la probabilidad de cada uno de los eventos.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado.

Evento A: "Obtener un múltiplo de 4".

Evento B: "Obtener un número impar".

Como A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A, B) = P(A) + P(B)$$

Como: $P(A) = \frac{1}{6}$ y $P(B) = \frac{3}{6}$

$P(A, B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$ $\quad P(A, B) = 16.66\,\% + 50\%$

$$P(A, B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 66.66\,\%$$

La probabilidad de dos eventos complementarios es igual 1, es decir, es igual al espacio muestral de ese experimento.

Por ejemplo,

Espacio muestral del experimento de lanzar un dado es (1, 2, 3, 4, 5 y 6)

Evento A: "Obtener un múltiplo de 4".

Evento A^c: "Obtener cualquier número de puntos, diferente de 4".

Como A^c es complemento de A, entonces:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Como: $P(A) = \frac{1}{6}$ y $P(A^c) = \frac{5}{6}$

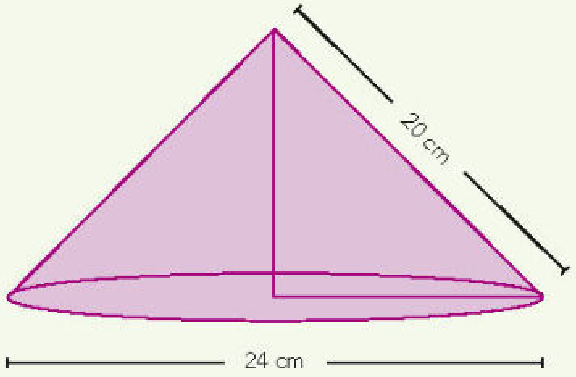
$P(A \cup A^c) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$ $\quad P(A \cup A^c) = 16.66\,\% + 84.33\%$

$$P(A \cup A^c) = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

Evaluación tipo PISA

El cono

Una compañía de jugos puso en el mercado una nueva presentación para sus productos. El nuevo envase es como el mostrado en la imagen de abajo.



Pregunta 1: ¿Cuánto mide de altura este envase?

a) 12 cm

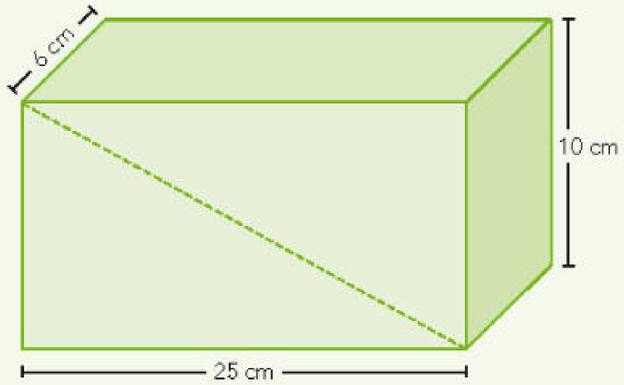
b) 16 cm

c) 20 cm

d) 24 cm

Listón para la caja

Para decorar una caja como la que se muestra a continuación, se le pondrá diagonalmente listón de color en todas caras.

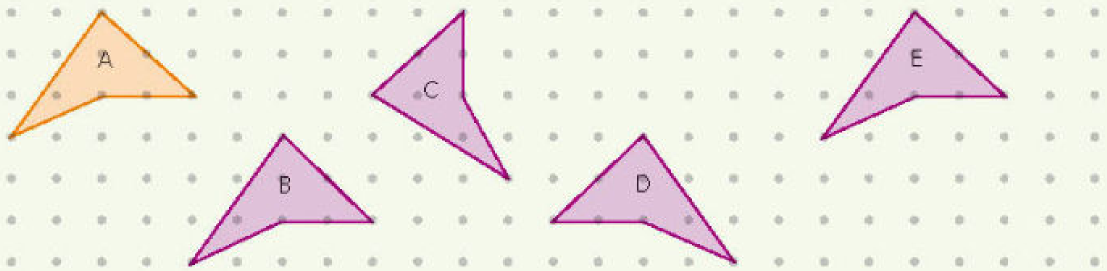


Pregunta 1: ¿Qué cantidad de listón se necesitará? ______________________

Evaluación tipo PISA

Las Herramientas

Mario tiene en su taller un tablero con clavos. Alguna de sus herramientas es como la que se muestra en la figura A. En la imagen se presentan diferentes formas de acomodarla.



Pregunta 1: Relaciona las columnas de la tabla de manera que se exprese si se trata de rotaciones, traslaciones o simetrías.

Figura	Rotación respecto a "A"		Traslación respecto a "A"		Simetría respecto a "A"	
B	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero
C	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero
D	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero
E	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero	Falso	Verdadero

Pregunta 2: Elige alguna de las figuras moradas y argumenta por qué es falsa o verdadera la transformación que se le realizó a la figura A.

____

____

____

____

____

BLOQUE 3

En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la continuidad y la perseverancia.

Jacques Anatole France.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientes

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Lección 14: Solución de ecuaciones cuadráticas por fórmula general

Lo que sabes

1. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 4x + 4 =$ ____

b) $x^2 - 6x + 16 =$ ____

c) $9x^2 - 24x + 16 =$ ____

d) $36x^2 + 60x =$ ____

e) $16x^2 - 25 =$ ____

- Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

f) Contesta las siguientes preguntas.

- ¿A qué se le llama Trinomio Cuadrado Perfecto? ____
- ¿Cómo se factoriza una diferencia de cuadrados? ____
- Explica el procedimiento para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$. ____
- Argumenta sobre la utilidad de la factorización para resolver una **ecuación cuadrática**. ____
- Resuelve los siguientes problemas planteando la ecuación correspondiente y aplica la factorización.

g) El producto de dos números consecutivos es 240. ¿Cuáles son esos dos números? ____

h) Andrea tiene que cortar una madera de forma cuadrada. Si su área es de 361 cm², ¿cuánto debe medir por lado dicha tabla? ____

i) Compara tus planteamientos y tus resultados con los de otros compañeros y reflexiona sobre la pertinencia de usar o no la factorización.

Glosario

Ecuación cuadrática. Las ecuaciones cuadráticas tienen como forma general la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, en esta ax^2 se llama término cuadrático o de segundo grado; bx término lineal y c término independiente. $a \neq 0$ y a, b y c son los coeficientes de la ecuación.

Actividades

1. Analicen la siguiente situación y contesten las preguntas.

a) Juan quiere comprar el terreno que se muestra en la imagen. Él sabe que de largo mide 5 m más que de ancho.

$A = 300\ m^2$

- Escriban una expresión algebraica que represente lo largo del terreno. ____
- Escriban una expresión algebraica que represente lo ancho del terreno. ____
- Escriban una expresión algebraica que represente el área del terreno. ____

b) Margarita afirma que el terreno se puede expresar con la ecuación $x(x + 5) = 300$. Argumenten por qué es cierta o no esta afirmación. ____

c) En caso de que la afirmación de Margarita sea correcta, realicen el procedimiento necesario para obtener una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

d) Comparen su ecuación con la de otras parejas y de manera grupal, coordinados por su profesor, acuerden y escriban la ecuación que corresponda a dicho planteamiento. ____

e) De la expresión obtenida, escriban en la siguiente tabla los valores de los coeficientes que corresponden según la ecuación.

a	b	c

Además de los métodos que ya conocen, estas ecuaciones se pueden resolver por medio de una fórmula que se conoce como fórmula general, que se presenta a continuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

f) Analicen lo que se realizó en cada paso de la aplicación de la fórmula general en la ecuación anterior (que se obtuvo del problema de Juan) y describan cada uno en los recuadros de la derecha.

Aplicación de la fórmula general		Descripción de las operaciones aplicadas
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		
$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-300)}}{2(1)}$		
$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{25 + 1200}}{2}$		
$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{1225}}{2}$		
$x = \frac{-5 \pm 35}{2}$		
$x_1 = \frac{-5 + 35}{2}$	$x_2 = \frac{-5 - 35}{2}$	
$x_1 = \frac{30}{2}$	$x_2 = \frac{-40}{2}$	
$x_1 = 15$	$x_2 = -20$	

- ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que quiere comprar Juan? ____________

g) Coordinados por su profesor, en una lluvia de ideas, compartan las descripciones realizadas en la tabla anterior y unifiquenlas en caso de que existan diferencias.

2. Analicen la solución del siguiente problema y contesten las preguntas.

El producto de dos números es 36. Si uno de los factores es mayor que el otro por 9 unidades, ¿a qué números nos referimos? ____________

a) Planteamos la ecuación.

Primero factor: x

Segundo factor: $x + 9$

$$x(x + 9) = 36$$
$$x^2 + 9x = 36$$
$$x^2 + 9x - 36 = 36 - 36$$
$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

b) Escribe los valores de los coeficientes de acuerdo a la forma general.

a	b	c

c) Usamos la fórmula general y sustituimos dentro de ella los valores de a, b y c. Validen si los valores sustituidos corresponden a lo referido en la siguiente expresión.

$$x = \frac{-(+9) \pm \sqrt{(+9)^2 - 4(+1)(-36)}}{2(+1)}$$

d) Resolvemos.

$$x = \frac{-(+9) \pm \sqrt{+81 + 144}}{2}$$
$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2}$$
$$x = \frac{-9 \pm 15}{2}$$

- ¿Cómo se obtuvo el +81 y el +144? ____________
- ¿Por qué resultó −9? ____________
- ¿Cómo se obtuvo el 225? ____________

e) Se determinan las raíces de la ecuación.

$$x_1 = \frac{-9 + 15}{2} \qquad x_2 = \frac{-9 - 15}{2}$$
$$x_1 = \frac{+6}{2} \qquad x_2 = \frac{-24}{2}$$
$$x_1 = +3 \qquad x_2 = -12$$

- Expliquen lo realizado en este paso. ____________

f) Comprobamos la solución con las raíces obtenidas, sustituyendo $x_1 = +3$ y $x_2 = -12$ en la ecuación planteada.

$$+1x^2 + 9x - 36 = 0$$

$x_1 = +3$	$x_2 = -12$
$+1(+3)^2 + 9(+3) - 36 = 0$	$+1(-12)^2 + 9(-12) - 36 = 0$
$+1(9) + 27 - 36 = 0$	$+1(+144) - 108 - 36 = 0$
$+9 + 27 - 36 = 0$	$+144 - 108 - 36 = 0$
$+36 - 36 = 0$	$+144 - 144 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

- ¿Cómo se obtuvieron el 9 y el 144? ____________
- ¿Cómo se obtuvieron el +27 y el −108? ____________

g) Obtengamos la solución de la ecuación. $x_1 = +3$ y $x_2 = -12$

Primer factor: x

Segundo factor: $x + 9$

- Si se toma a $x = +3$, ¿cuál es el primer factor? ________ ¿Cuál es el segundo factor? ________
- Si se toma a $x = -12$, ¿cuál es el primer factor? ________ ¿Cuál es el segundo factor? ________
- Comparen sus resultados con los de otras parejas. Reflexionen sobre cómo determinar si es o no correcta la solución de su ecuación.

1 3. Resuelve el siguiente problema planteando la ecuación y resolviéndola con la fórmula general.

a) El área de un rectángulo es 84 m². Se sabe que la base del rectángulo es 5 metros menor que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo? ________

- Con otros compañeros verifica que hayas planteado la ecuación correctamente y contesta, ¿cuáles son los valores de a = ________ b = ________ y c = ________?

Usa el siguiente arreglo de la fórmula general para resolver tu ecuación.

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(+1)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\qquad\qquad}}{2}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\qquad}}{2}$$

$$x = \frac{\pm}{2}$$

$$x_1 = \frac{+}{2} \qquad x_2 = \frac{-}{2}$$

$$x_1 = \frac{\quad}{2} \qquad x_2 = \frac{\quad}{2}$$

$$x_1 = \qquad x_2 =$$

b) Compara tu procedimiento con el de otros compañeros y reflexiona sobre las dificultades que se hayan presentado.

- Justifica por qué las raíces de la ecuación son +12 y −2. ________
- Compara tus resultados y reflexiona por qué para la solución de este problema no se debe de tomar en cuenta −2. Escribe tu conclusión en el cuaderno.

4. Analiza el siguiente desarrollo para la solución por fórmula general, complétalo y contesta.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(+2)}}{2(\quad)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{+49 - \qquad}}{+6}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\qquad}}{+6}$$

$$x = \frac{+7 \pm 5}{+6}$$

$$x_1 = \frac{+}{+6} \qquad x_2 = \frac{-}{\qquad}$$

$$x_1 = \qquad x_2 =$$

$$x_1 = \qquad x_2 = +\frac{1}{3}$$

a) ¿Cuál es la ecuación que corresponde a este planteamiento? ________

b) ¿Cómo es que se llegó a que $x_2 = \frac{1}{3}$? ________

c) Compara tus resultados con los de otros compañeros. Reflexiona sobre si las raíces de una ecuación de segundo grado serán siempre un número entero. Escribe tu conclusión. ________

5. Considera la ecuación: $x^2 + 3x = 238$ y realiza lo que se indica.

a) Plantea un problema. ________

b) Resuélvela mediante el uso de la fórmula general.

c) Comparte tus planteamientos con el resto del grupo y, coordinados por su profesor, elijan los mejores y escríbanlos en su cuaderno.

Notas importantes

Lee con atención la siguiente información para enriquecer tus ideas.

A la parte $b^2 - 4ac$, se le conoce como discriminante de la fórmula general de ecuaciones de segundo grado, y con éste se puede conocer la cantidad y tipo de raíces que tendrá una ecuación de segundo grado sin necesidad de realizar toda la formula general.

Cuándo:

$b^2 - 4ac$ es mayor a 0, es decir, es cualquier número positivo las raíces son dos.

$b^2 - 4ac$ es igual a 0, es decir, la ecuación tiene una sola solución.

$b^2 - 4ac$ es menor a 0, es decir, cualquier número negativo. La ecuación no tiene solución dentro de los números reales.

Analicen la solución: $3x^2 + 10x + 3 = 0$ donde, $a = +3$, $b = +10$ y $c = +3$

$b^2 - 4ac$

$(+10)^2 - 4(+3)(+3)$

$100 - 36$

64

Como $64 > 0$, por lo tanto $3x^2 + 10x + 3 = 0$ tiene dos raíces o soluciones.

Actividades

1. Escriban sobre cada línea el número de soluciones que tiene cada una de las siguientes ecuaciones, según el valor de su discriminante.

   a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ __________

   b) $x^2 - 2x + 3 = 0$ __________

   c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ __________

   d) $x^2 - 10x - 11 = 0$ __________

   e) $4x^2 - 5x + 3 = 0$ __________

   - Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Reflexiona sobre las dificultades que se hayan presentado.
   - Resuelve estas ecuaciones en tu cuaderno utilizando la fórmula general.

Lo que aprendí

1. Resuelve las siguientes ecuaciones empleando la fórmula general.

   a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

   b) $2x^2 + 3x = 65$

   c) $2x(5 - 2x) = -24$

2. En tu cuaderno, realiza el procedimiento de solución para los siguientes problemas empleando la fórmula general y escribe, sobre la línea, tu respuesta.

   a) Pablo construyó con madera una repisa de forma rectangular. De ancho mide dos cuartas con cinco centímetros, y de largo le faltan ocho centímetros para medir lo de tres cuartas. Sí el área de dicha mesa es de 2 340 cm², ¿cuáles son, en centímetros, las dimensiones de la repisa? __________

   b) La suma de las edades de dos hermanas es 23 años y su producto 102. ¿Cuáles son las edades de estas hermanas? __________

   c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexiona sobre las diferencias encontradas.

Desafío

1. Encuentra los cinco errores que se cometieron al resolver la ecuación $4x^2 - 13x + 3 = 0$. Dentro del recuadro explica por qué se cometió ese error y cuál es la solución correcta.

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(+4)(+3)}}{2(+4)}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{+169 + 48}}{+2}$$

$$x = \frac{+13 \pm \sqrt{121}}{+8}$$

$$x = \frac{+13 \pm 12}{+8}$$

$$x_1 = \frac{+13 + 11}{+8} \qquad x_2 = \frac{+13 - 11}{+8}$$

$$x_1 = \frac{+24}{+8} \qquad x_2 = \frac{-24}{+8}$$

$$x_1 = +\frac{1}{3} \qquad x_2 = +\frac{1}{4}$$

2. Compara tus resultados con los de otros compañeros y confronten sus procedimientos.

Notas importantes

Lee con atención la siguiente información para enriquecer tus ideas.

La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$. Éstas se pueden resolver empleando la factorización o bien, la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

El coeficiente del término cuadrático es el valor de a.

El coeficiente del término lineal es el valor de b.

El coeficiente del término independiente es el valor de c.

Por ejemplo, en la ecuación $3x^2 + 5x - 22 = 0$

$a = +3$, $b = +5$ y $c = -22$

Y al sustituirlos dentro de la fórmula, nos queda, $3(+3)^2 + 5(+5) - 22 = 0$

Las raíces de una ecuación de segundo grado pueden ser números reales, es decir, enteras o fraccionarias.

$$x = \frac{-(+5) \pm \sqrt{(+5)^2 - 4(+3)(-22)}}{2(+3)}$$

Enlázate

Entra en la siguiente dirección y analiza la solución de algunos otros problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado. Comprueba su solución empleando la fórmula general. https://www.matesfacil.com/resueltos-ecuaciones-segundo-grado.htm. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:44 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Lección 15: Congruencia y semejanza de triángulos

Lo que sabes

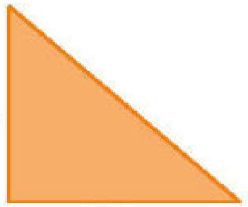
1. Realiza las actividades que se solicitan.

a) Traza dos triángulos en cada columna, considerando el criterio de congruencia indicado en cada caso.

Lado-Ángulo-Lado (*LAL*)	Ángulo-Lado-Ángulo (*ALA*)	Lado-Lado-Lado (*LLL*)

b) Considera el siguiente triángulo y traza otro que sea semejante a él, utilizando el segmento que se muestra.

3 cm



3.5 cm

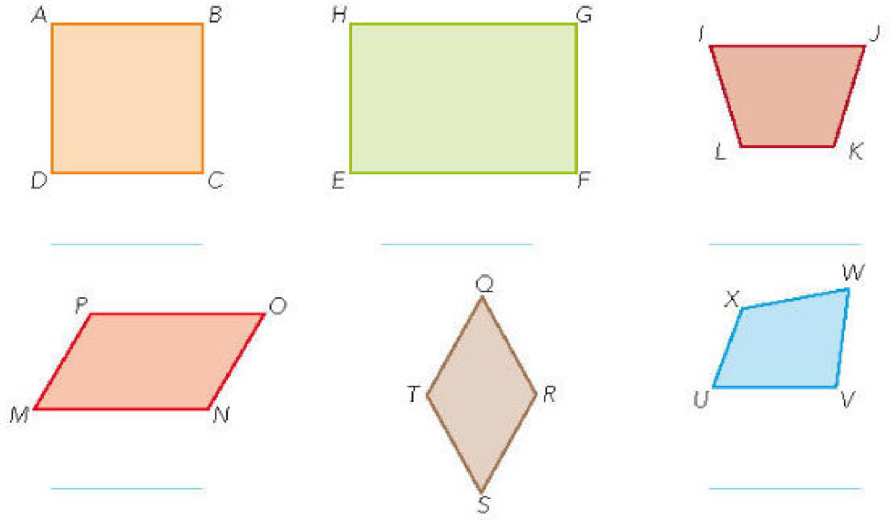
5 cm

c) Compara tus trazos con los de otros compañeros y, orientados por su profesor, verifiquen que sean correctos.

Actividades

1. Analicen cada una de las siguientes situaciones y realicen lo que se pide.

a) Auxiliándose de los criterios de congruencia de triángulos, escriban sobre la línea si se forman o no triángulos congruentes al trazar alguna de sus diagonales.



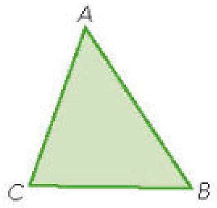
b) Coordinados por su profesor, expongan ante el grupo sus argumentos para considerar en cuáles cuadriláteros se obtuvieron triángulos congruentes. Realicen sus anotaciones en su cuaderno.

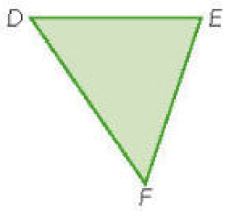
c) Utilicen los criterios de congruencia y escriban las razones para considerar que dos triángulos son congruentes.

2. Los siguientes triángulos son semejantes y sus perímetros son iguales.

a) Calculen las longitudes de cada lado de los triángulos.

ΔABC	ΔDEF
$CB = 2x + 6$	$EF = x - 5$
$CA = 3x + 3$	$DF = 4x + 2$
$BA = 5x - 2$	$DE = 4x - 2$





- Establezcan una igualdad que permita calcular el valor de x.
- Realicen, en su cuaderno, el procedimiento adecuado para encontrar el valor de x.
- ¿Cuánto vale x?
- Comparen su procedimiento para encontrar el valor de x, coordinados por su profesor, escriban en el pizarrón el que consideren más adecuado, posteriormente, escríbanlo en su cuaderno.
- Justifiquen por qué se puede afirmar que el ΔABC es congruente al ΔDEF
- ¿Emplearon algún criterio de congruencia de triángulos para justificar su respuesta?

  ¿Cuál?
- Compartan su justificación con el resto del grupo y, con la ayuda de su profesor, reflexionen sobre la importancia de emplear los criterios de congruencia de triángulos.

b) Reflexionen y argumenten sobre lo siguiente.

- ¿Todos los triángulos de igual perímetro son congruentes?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y, coordinados por su profesor, argumenten sobre lo que se necesita para considerar que dos triángulos de igual perímetro son congruentes.

c) Cada uno trace en su cuaderno lo que se indica y realicen lo que se pide.

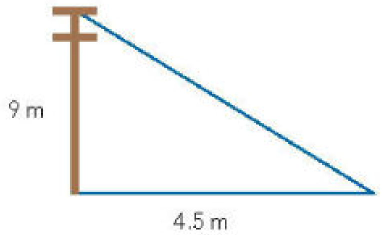
- Un triángulo cualquiera.
- Comparen sus triángulos y argumenten si se trata o no de triángulos semejantes.
- Un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual sea de 45°.
- Comparen sus triángulos y argumenten si se trata o no de triángulos semejantes.
- Un triángulo rectángulo cualquiera.
- Comparen sus triángulos y argumenten si se trata o no de triángulos semejantes.
- Un triángulo rectángulo en el que la longitud de un cateto de un triángulo mida lo doble que su homólogo en el triángulo de tu compañero.
- Comparen sus triángulos y argumenten si se trata o no de triángulos semejantes.
- Un triángulo rectángulo, donde uno de sus ángulos agudos, sea congruente con el ángulo agudo correspondiente al del triángulo de su compañero.
- Comparen sus triángulos y argumenten si se trata o no de triángulos semejantes.
- Comparen sus trazos y sus respuestas con los de otras parejas, confronten sus ideas y, orientados por su profesor, justifiquen las diferencias que hayan encontrado.

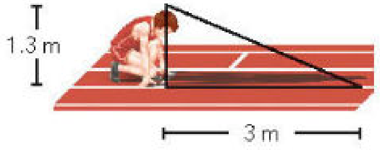
Actividades

1. Analicen la imagen que se presenta y contesten.

a) En la imagen se muestra un poste, un atleta y la sombra que proyectan respectivamente, ambos a la misma hora del día.

- Argumenten si los triángulos que se forman son o no semejantes. ______

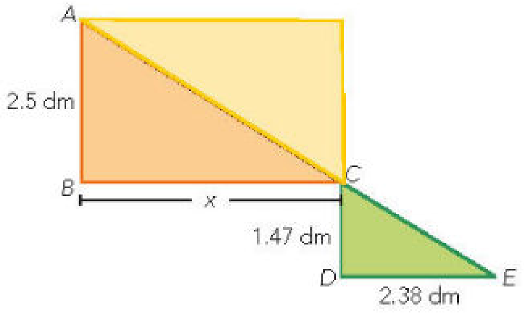




- Considerando la longitud de la sombra que proyecta el atleta, ¿de cuánto debe ser su altura para que los triángulos sean semejantes? ______

b) Coordinados por su profesor, presenten ante el grupo sus argumentos y los diferentes procedimientos para responder a la pregunta anterior.

2. Consideren la información dada en la imagen y contesten las preguntas.



$AB // CD$

$BC // DE$

ΔABC y ΔCDE son rectos.

a) ¿Cuál es la longitud de BC (x)? ______

b) ¿Cuál es la longitud del segmento AE? ______

c) Para encontrar la longitud de AE, Alma calculó primero la longitud de CE de la siguiente manera:

$CE = \sqrt{2.38^2 + 1.47^2}$

$CE = \sqrt{5.66 + 2.16}$

$CE = \sqrt{7.82}$

$CE = 2.79$

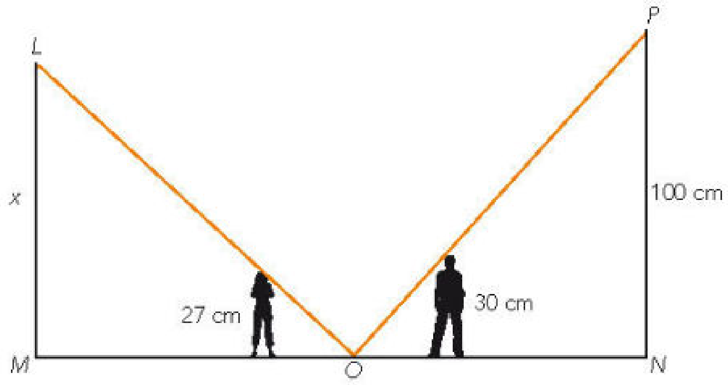
- Calcula el valor de AC ______
- Sumen las longitudes AC y CE y confróntenla con la respuesta que dieron en el inciso b.

d) Mediante algún criterio de semejanza, argumenten por qué el Δ naranja es semejante al Δ verde.

e) Comparen con otra pareja sus respuestas y sus procedimientos. En caso de tener diferencias, justifíquenlas.

3. En la siguiente ilustración, Arturo tiene una altura de 30 cm y Alejandra 27 cm. Si en realidad Arturo mide 100 cm, ¿cuál es la estatura real de Alejandra? ______

Consideren que $LM // PN$ y LO y PO son perpendiculares.



a) Escriban en su cuaderno, el procedimiento para encontrar el valor de x.

b) Mediante algún criterio argumenten por qué se puede afirmar que el ΔLOM y el ΔPON son semejantes.

c) Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otras parejas y, orientados por su profesor, concluyan sobre la importancia de utilizar los criterios de semejanza de triángulos en la resolución de problemas. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Los criterios *LLL*, *LAL* y *ALA* de congruencia de triángulos estudiados en la lección 2, son útiles para resolver problemas en los que se desconoce uno o más valores de un triángulo cualquiera.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales.

Dos triángulos congruentes también son semejantes.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas.

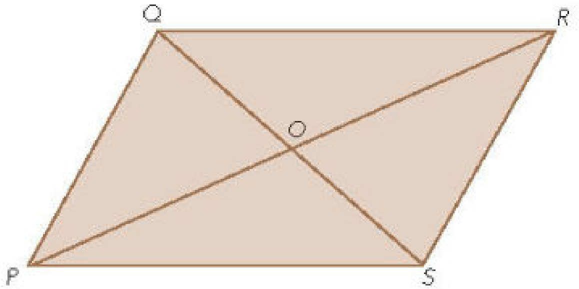
a) Un árbol proyecta una sombra de 9.8 m. Al mismo tiempo un niño cuya estatura es de 1.25 m proyecta una sombra de 2.5 m. ¿Cuál es la altura del árbol? ______

- Argumenta si los triángulos que se forman a partir de este problema son congruentes o semejantes.

______

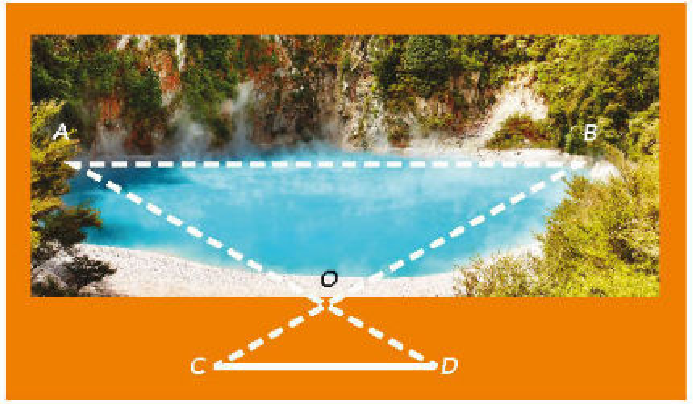
______

b) Se tiene una tabla en forma de paralelogramo a la que se le han trazado sus diagonales. Argumenta por qué el ΔROQ es congruente a ΔSOP.



c) Calcula el ancho del lago AB si se sabe que $CD // AB$ y que $CD = 8$ m; $OD = 6$ m y $OA = 24$ m.

- $AB =$ ______
- Argumenta por qué ΔABO es semejante a ΔCDO. Redacta la conclusión en tu cuaderno.
- Comparen sus respuestas y argumentos con los de otros compañeros y, orientados por su profesor, verifiquen que sean correctos.



Desafío

1. Analiza y resuelve el siguiente problema.

a) Andrés tiene en su cuarto dos esquineros de forma triangular; son isósceles y además son semejantes entre sí. El perímetro de uno de los esquineros es 204.9 cm y es tres veces el del otro. Si el lado desigual del esquinero pequeño mide 28.2 cm, ¿cuál es el área de ambos esquineros?

______

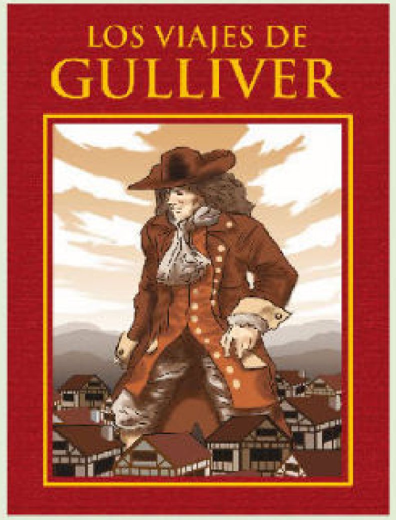
2. Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Enlázate

Consulta la siguiente dirección electrónica para que continúes profundizando en la semejanza de triángulos y la resolución de problemas.
http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/06_Semejanza/Ejercicios_resueltos.pdf.
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:59 horas.)
Comenta con tus compañeros las dudas que tenías antes y la forma en que las fuiste resolviendo.

Horizonte cultural

¿Pueden existir hombres gigantes?



Gulliver, tras un naufragio, aparece en las costas de Liliput. La escala de todas las cosas es de una pulgada a un pie: por tanto, Gulliver es 12 veces más alto que los habitantes del país. Es un gigante en ese país.

La resistencia a la rotura de una cuerda, alambre, columna, o de los huesos de las piernas, es proporcional a la superficie de su sección recta. Tal y como describe Jonathan Swift, Gulliver y los liliputienses tienen la misma constitución, aunque distintos tamaños: *son semejantes*. La razón de semejanza sería:

$$r = \frac{\text{Altura de Gulliver}}{\text{Altura media de un liliputiense}} = 12$$

Como hemos dicho que la resistencia de los huesos de las piernas es proporcional al área de su sección plana, y teniendo en cuenta la relación existente entre las áreas de figuras semejantes, la relación entre las resistencias de los huesos será:

$$\frac{\text{Área sección plana de los huesos de Gulliver}}{\text{Área sección plana de los huesos de un liliputiense}} = r^2 = 12^2 = 144$$

Por tanto, las piernas de Gulliver serán 144 veces más resistentes que las de un liliputiense medio (que no es lo mismo que medio liliputiense, ¿no?).

Estudiemos ahora la relación que hay entre los pesos. Como Gulliver es semejante a los habitantes de Liliput, la relación entre los volúmenes, y por tanto entre las masas, será el cubo de la razón de semejanza:

$$r = \frac{\text{Peso de Gulliver}}{\text{Peso de un liliputiense}} = 12$$

Gulliver pesa 1 728 veces más que un liliputiense medio, pero sus huesos sólo son 144 veces más resistentes que la de los habitantes de Liliput. Es decir, el peso del gigante ha aumentado doce veces más que la resistencia de sus huesos. Para caminar, tendría que hacer un esfuerzo similar al de una persona normal de Liliput ¡que llevará 11 personas más sobre sus hombros!

Si existieran los hombres gigantes, éstos acabarían aplastados por su propio peso.

Te invitamos a que investigues la equivalencia en cm de una pulgada y de un pie. También te recomendamos que leas la historia de Gulliver.

Fuente: http://recursostic.educacion.es/eda/version/v1/Documentos/materiales/miguel_martin/Unidad%20Semejanza/Unidad/gigantes.htm. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 14:57 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Lección 16: Teorema de Tales

Lo que sabes

1. Utilizando la proporcionalidad en las figuras semejantes, analiza la siguiente situación y contesta.

a) Las dimensiones oficiales de una portería de futbol se muestran en la imagen. Si Pedro tiene una portería semejante en la que su altura es de 1.20 m, ¿cuál debe ser la longitud del travesaño?

- ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

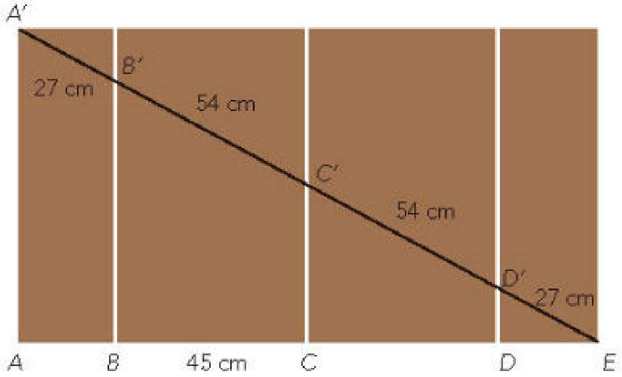
b) Compara tu respuesta y procedimiento con los de otros compañeros y, orientados por su profesor, confronten sus resultados.

c) Determina las dimensiones de una portería que sea semejante a la de Pedro.

Actividades

1. El dibujo muestra el modelo de una sección para las puertas de una cocina integral, realizado por un carpintero. Analícenlo y respondan lo que se pregunta.

El carpintero utilizó una barra (EA') para sostener las puertas. Al presentarlas, los segmentos blancos quedan paralelos entre sí y también con AA'.



a) Describan brevemente la relación que existe entre cada una de las siguientes medidas.

- ED' y $D'C'$
- $D'C'$ y $C'B'$
- $C'B'$ y $B'A'$
- ED' y $B'A'$
- ¿Qué relación encuentran entre la longitud de lo ancho de las puertas?

b) Justifiquen por qué los triángulos $A'AE$, $B'BE$, $C'CE$ y $D'DE$ son semejantes.

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuál es la medida del ancho de las puertas de los extremos?

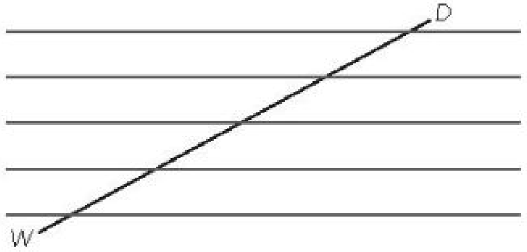
d) Expliquen el procedimiento que siguieron para obtener el resultado anterior.

e) En los triángulos $B'BE$ y $D'DE$ los segmentos DD' y BB', ¿son o no proporcionales?

Argumenten su respuesta.

f) Organizados por su profesor, en una plenaria, discutan y concluyan sobre la relación de proporcionalidad que existe entre los lados homólogos de dos o más triángulos semejantes.

2. La siguiente ilustración muestra 5 rectas paralelas, que están a la misma distancia entre ellas, cortadas por una **transversal** WD. Analicen la situación y contesten.



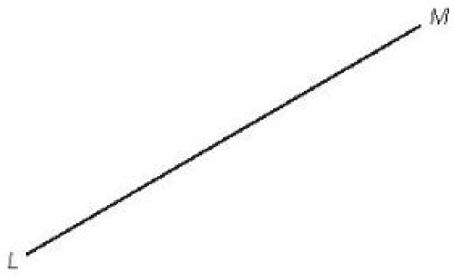
Glosario

Transversal. Es aquella línea que tiene la particularidad de atravesar, al menos, otras 2 líneas, cuando se logra una intersección con otras dos líneas cualesquiera, en un par de puntos diferentes.

a) Marquen con rojo los puntos donde la recta DW toca las rectas paralelas.

- ¿Cuántos puntos marcaron?
- Considerando la distancia de uno a otro de los puntos marcados, ¿en cuántas partes quedó dividida la recta DW?
- Argumenten por qué las partes en que se dividió la recta DW son iguales.

b) Discutan la forma de dividir el siguiente segmento en 7 partes iguales, utilizando lo realizado en el inciso anterior y una hoja rayada de su cuaderno.

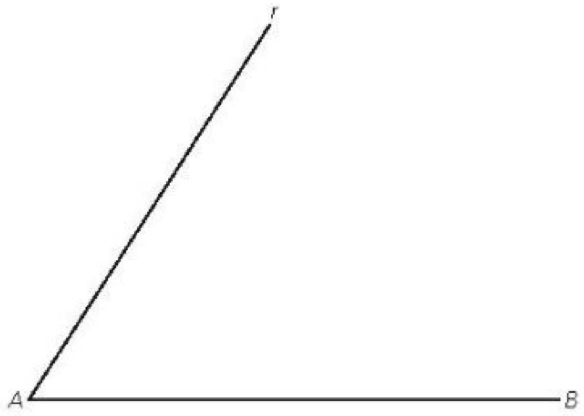


- Describan el procedimiento empleado para dividir el segmento y justifíquenlo.

c) Organizados por su profesor, expongan ante el grupo sus respuestas y sus procedimientos.

3. Realicen lo que se pide en cada paso para dividir el segmento *AB* en 5 partes iguales. Posteriormente realicen lo que se indica.

a) Se ha trazado una **semirrecta** auxiliar *r* que pasa por *A*.



Glosario

Semirrecta. Porción de una línea recta que está compuesta por todos los puntos que se localizan hacia uno de los costados de un determinado punto fijo que se toma como referencia: esto quiere decir que una semirrecta tiene un origen (el punto que le da inicio) pero se extiende hacia el infinito.

b) Elijan una abertura del compás entre uno y dos centímetros. Apoyado en *A*, hagan una marca sobre la recta auxiliar. Llámenle *C* al punto marcado.

c) Con esa misma medida marquen los puntos *D* apoyando en *C*; *E* apoyando en *D* y así sucesivamente *F* y *G*.

d) Unan *G* con *B* y tracen rectas paralelas a la recta *GB* que pasen por los puntos *F, E, D* y *C*.

e) Marquen los puntos de intersección de estas rectas con el segmento *AB* con las letras *H, I, J, y K*, de manera que se formen las rectas *CK, DJ, EI* y *FH*.

f) Analicen los triángulos que se forman, de acuerdo a lo siguiente:

El ΔCAK y el ΔDAJ.

AJ es prolongación de *AK* y *AD* es prolongación de *AC*.

DJ es paralelo a *CK*.

$<C = <D$ por lo que podemos afirmar que los triángulos son semejantes.

- Considerando este análisis, argumenten si es cierta o no la siguiente proporción.

$\frac{AK}{AC'} = \frac{AJ}{AD}$ ______

Organizados por su profesor, presenten sus argumentos ante el grupo y justifiquen, según la situación anterior, si la siguiente proporción es verdadera.

$\frac{AK}{KJ'} = \frac{AC}{CD}$ ______

4. Se requiere dividir el segmento *AB* en dos partes, de manera que la razón entre las medidas sea 2:3.

a) Dividan el segmento en cinco partes iguales, considerando el procedimiento del ejercicio anterior.
- ¿Cuántos triángulos se formaron? ______
- Justifiquen si los triángulos que se formaron son o no congruentes. ______

b) En el segmento *AB* partir de *A*, marquen con la letra *C* la segunda intersección. Considerando el triángulo que se forma aquí y el triángulo mayor, midan sus longitudes y obtengan las proporciones entre sus lados.

c) ¿Cuál es la razón entre los lados homólogos que están sobre *AB*? ______

d) ¿Es o no equivalente a $\frac{2}{3}$? ______ Argumenten su respuesta. ______

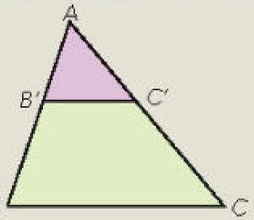
e) Comparen su trazo y su procedimiento con los de otras parejas y, orientados por su profesor, concluyan sobre las razones y las proporciones que se obtienen al trazar triángulos semejantes. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Si en un triángulo se traza un segmento paralelo a uno de sus lados, se obtiene un triángulo semejante al primero. Por lo tanto sus lados son proporcionales. Esta propiedad se deriva del teorema de Tales.

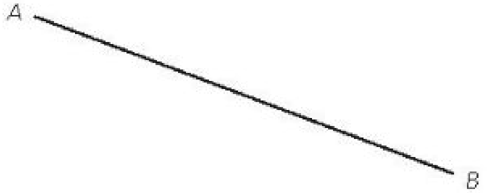
$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$



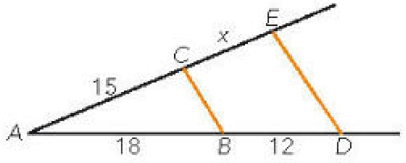
Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas.

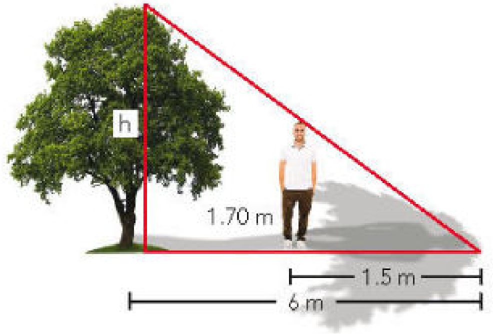
   a) Divide el segmento *AB* en dos partes, de manera que la razón de semejanza sea $\frac{3}{4}$ con el procedimiento de la línea auxiliar. Mediante el teorema de Tales justifica que los triángulos que se forman son semejantes.



   b) Calcula el valor de *x* (segmento *CE*) si los segmentos *CB* y *ED* son paralelos.



   c) ¿Calcula la altura (*h*) del árbol?

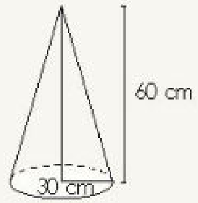


2. Compara tus resultados con los de otros compañeros y, orientados por su profesor, verifiquen que sean correctos.

Desafío

1. Analicen la siguiente situación y resuélvanla.

   A un cono como el de la imagen se le cortan las $\frac{2}{3}$ partes de su altura, ¿cuánto medirá el radio del nuevo cono?



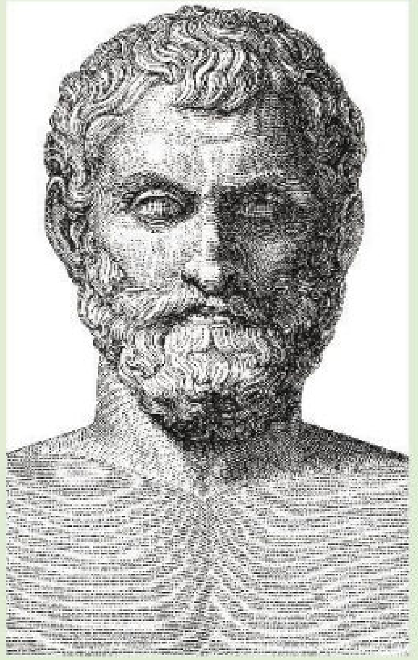
Enlázate

Consulta la siguiente página para que amplíes tus conocimientos acerca del Teorema de Tales. http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html. (Consulta: 17 de marzo de 2013 a las 7:15 horas.)

Horizonte cultural

A continuacion te presentamos un fragmento de la biografia de Tales de Mileto. Léelo para que enriquezcas tu informacion.

Tales de Mileto



Las fuentes procedentes de Diógenes Laercio y de Suidas datan el nacimiento de Tales en torno al año 640 a.n.e. y su muerte hacia el 545 a.n.e. Ahora bien, la fecha, generalmente aceptada, de la madurez de Tales es el 585 a.n.e., año en que tuvo lugar un eclipse de sol que él mismo predijo, según testimonio de Herodoto (I, 74) y de Plinio (*Hist. Nat.* II, 53). Si suponemos que en esta fecha tenía entre 40 y 45 años (edad aceptada como propia de la madurez de un pensador), entonces la fecha de su nacimiento no debe situarse más allá del 630 ó 625 a.n.e., fecha que concuerda aproximadamente con la de la olimpiada 39 (624 a.n.e.) que transmite también Diógenes Laercio (I, 37-38).

Los testimonios nos informan de dos obras atribuidas a Tales (una, denominada *Astrología Náutica*, y otra *Sobre los solsticios y los equinoccios*), sin embargo, los propios testimonios conceden escaso valor a estas informaciones. Lo que sí parece cierto es que Tales visitó Egipto, según testimonio de Josepho y de Aecio, quienes le atribuyen, además, una teoría sobre las crecidas del Nilo (*De placitis reliquiae*, IV, 1, 1). Refuerzan esta noticia Plinio (Hist. Nat. XXXVI, 82) y Plutarco (*Septem sapientium convivium*, 147a) que informan que Tales descubrió la forma de conocer la altura de las pirámides.

La tradición considera a Tales como uno de los siete sabios (junto a Bias, Solón, Quilón, Pítaco, Cleóbulo y Periandro), con los atributos propios del sabio distraído que cae a un pozo por ir observando las estrellas (Platón, Teeteto, 174a), o como el sabio desinteresado a quien no interesan las riquezas, pero que demuestra a sus conciudadanos «qué fácil resulta a los filósofos enriquecerse cuando quieren hacerlo» (anécdota de las prensas de aceite, en Aristóteles, *Política*, I, 11, 1259a).

Otras veces, Tales es presentado como el arquetipo de científico interesado por múltiples especialidades, aún en estado embrionario, como la astronomía (eclipse de sol del 585 a.n.e.) y la geometría. A Tales se le atribuye el descubrimiento de cinco teoremas geométricos. En primer lugar, el teorema relativo a la proporcionalidad de los segmentos cortados por rectas paralelas. El teorema, de dudosa atribución a Tales a pesar de llevar su nombre en la mayoría de los tratados elementales de geometría, aparece demostrado por primera vez en el libro VI de los *Elementa* de Euclides. No obstante, la atribución no carece de fundamento pues Tales lo habría, al menos, ejercitado en la determinación de la altura de las pirámides. Proclo atribuye, además, a Tales los tres teoremas siguientes (Diels-Kranz, 11 a 20): de la bisección del círculo, de la igualdad de los ángulos de la base en un triángulo isósceles, y de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice. Por último, según nos transmite D. Laercio (I, 24-25), Panfila atribuye a Tales el descubrimiento del teorema del triángulo diametral.

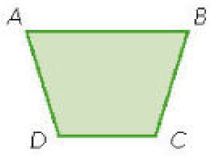
Fragmento tomado de: http://www.filosofia.org/cur/pre/tales.htm. (Consulta: 17 de marzo de 2013 a las 20:45 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Lección 17: Figuras homotéticas

Lo que sabes

1. Considera el siguiente polígono y realiza lo que se indica.



a) Traza, en tu cuaderno, el polígono A', B', C', D', de manera que la longitud de los lados mida lo doble que los de la figura original.

b) Traza, junto a la figura original, el polígono A'', B'', C'', D'' de manera que se pueda decir que:

c) ...la longitud de los lados mida la mitad que los de la figura original.

d) ¿Cuál es la razón entre los segmentos de la figura $ABCD$ y los de la figura $A'B'C'D'$?

e) ¿Cuál es la razón entre los segmentos de la figura $ABCD$ y los de la figura $A''B''C''D''$?

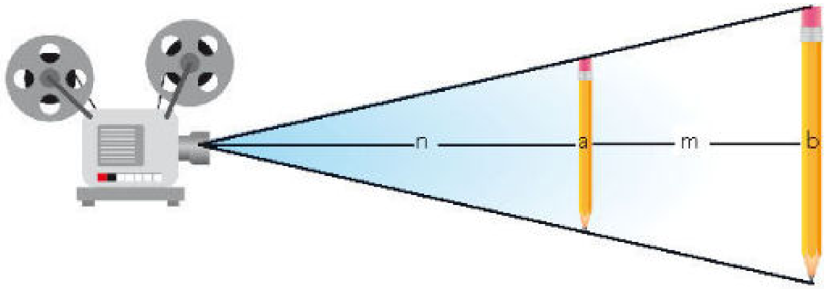
f) ¿Cuál es a razón entre los segmentos de la figura $A'B'C'D'$ y los de la figura $A''B''C''D''$?

g) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, orientados por su profesor, confronten sus resultados para llegar a conclusiones generales.

Actividades

1. Analicen la siguiente situación y contesten.

a) Se está utilizando la pared como pantalla o fondo y se ilumina con un proyector un lápiz.

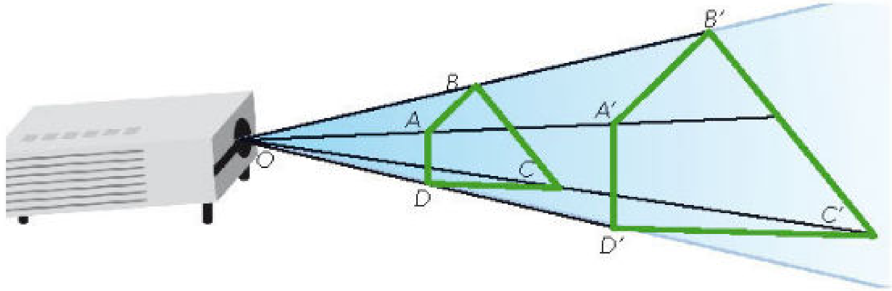


- ¿Qué sucede con el lápiz cuando se aleja o se acerca el proyector a la pared?

- Si se deja fijo el proyector y se aleja o acerca el lápiz, ¿qué sucederá con la imagen que se refleja en la pared?
- En la imagen, midan la distancia que hay entre el proyector y cada lápiz. También midan la longitud de cada lápiz.
- Obtengan la razón entre las distancias y la razón entre las longitudes.
- Anoten sus observaciones.

b) Mediante una lluvia de ideas, y coordinados por su profesor, argumenten y escriban una conclusión sobre lo que verificaron con la razón entre m y n y entre a y b.

2. Analicen la siguiente figura, considerando que las figuras son semejantes y que los lados homólogos son paralelos, y contesten.



a) Escriban el valor correspondiente a cada una de las siguientes razones.

$\frac{OA'}{OA} =$ ____ $\frac{OB'}{OB} =$ ____

$\frac{OC'}{OC} =$ ____ $\frac{OD'}{OD} =$ ____

b) Ahora escriban el valor de las razones correspondientes a los segmentos.

$\frac{A'B'}{AB} =$ ____ $\frac{B'C'}{BC} =$ ____

$\frac{C'D'}{CD} =$ ____ $\frac{C'A'}{CA} =$ ____

c) ¿Qué relación observan entre las razones del inciso a y las del inciso b?

d) Coordinados por su profesor, discutan esta situación y escriban una conclusión al respecto.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Dos figuras son homotéticas si se cumplen las siguientes condiciones:

- Las rectas que unen los vértices correspondientes se intersecan en un punto, llamado centro de homotecia.
- Las razones de las distancias del centro de homotecia a cada par de vértices correspondientes son iguales. Esto es la razón de homotecia.

Actividades

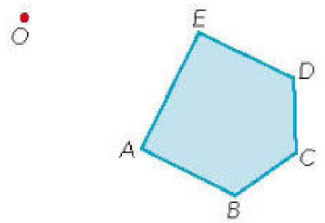
1. Realicen lo que se pide para construir la figura homotética a la que se propone.

   a) Tomen el punto *O* como centro de homotecia y únanlo con el punto *A*.

   b) Prolonguen el segmento *OA*, y con una distancia igual a *OA* ubiquen sobre la prolongación el punto *A'*.

   c) Realicen lo mismo con los puntos *B*, *C*, *D* y *E* para encontrar los puntos *B'*, *C'*, *D'* y *E'*.

   d) Unan los puntos obtenidos para obtener el polígono A'B'C'D'E'



- ¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos homólogos de los polígonos? ______
- ¿Cómo son los ángulos homólogos de los polígonos? ______
- ¿Qué relación hay entre los perímetros de ambas figuras? ______
- ¿Qué relación hay entre las áreas de ambas figuras? ______
- ¿Cuál es la razón de homotecia? ______
- Comparen su figura y su respuesta con las de otros equipos.
- Orientados por su profesor, organicen una lluvia de ideas y anoten los aspectos más importantes de esta actividad. ______

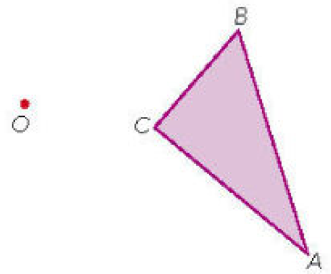
2. A partir del triángulo que se presenta, construyan una figura homotética con base en las siguientes indicaciones.

   a) Tomen como centro de homotecia el punto *O*.

   b) Tracen los segmentos *AO*, *BO*, *CO* y prolónguenlos en sentido contrario de donde se encuentra la figura.

   c) Ubiquen los puntos *A'*, *B'*, *C'* sobre las rectas que prolongaron, de manera que la distancia *AO* = *OA'*, *BO* = *OB'* y *CO* = *OC'*.

   d) Formen el triángulo *A'B'C'*.



- ¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos homólogos de los polígonos? ______
- ¿Cómo son los ángulos homólogos de los polígonos? ______
- ¿Qué diferencias hay entre el triángulo *A'B'C'* y el original? ______
- ¿Son semejantes los dos triángulos? ______
- ¿A qué distancia quedó el centro de homotecia con respecto a los dos triángulos? ______
- ¿Cuál es la razón de homotecia? ______
- Argumenten por qué es o no conveniente distinguir esta razón de homotecia, asignándole un signo negativo. ______
- ¿Cuál es la razón entre los perímetros de ambas figuras? ______
- ¿Cuál es la razón entre las áreas de ambos triángulos? ______
- Tracen en su cuaderno otras figuras homotéticas que cumplan con las características anteriores.

   e) Orientados por su profesor, argumenten en qué casos se considera que la razón de homotecia es inversa y en cuáles es directa. ______

3. Realicen la construcción de tres figuras homotéticas, considerando las indicaciones de cada inciso.

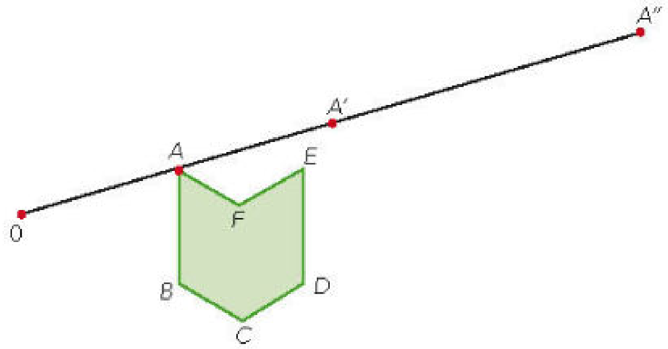
a) Tracen el segmento *OA* y prolónguenlo.

b) Con una medida igual a *OA* marquen el punto *A′*, midiendo a partir de *A*.

c) Con una medida igual a *OA′* marquen el punto *A″*, midiendo a partir de *A′*.

d) Realicen el mismo procedimiento con los puntos *B, C, D, E* y *F* para obtener los puntos *B′, C′, D′, E′* y *F′* y los puntos *B″, C″, D″, E″* y *F″* respectivamente.

e) Formen los polígonos *A′B′C′D′E′F′* y *A″B″C″D″E″F″*.



f) Comparen sus figuras con las de otros equipos y contesten las siguientes preguntas.

Llámenle figura 1 al polígono *ABCDEF*, figura 2 al polígono *A′B′C′D′E′F′* y figura 3 al *A″B″C″D″E″F″*.

- ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 2 con respecto a la figura 1? ____________
- ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 3 con respecto a la figura 2? ____________
- ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 3 con respecto a la figura 1? ____________
- Si el segmento *AB* mide 1.5 cm, ¿cuánto mide el segmento *A″B″*? ____________

g) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. En caso de que tengan diferencias justifíquenlas.

h) En una plenaria, coordinados por su profesor, concluyan sobre la operación o las operaciones que permiten calcular las medidas de la figura 3 sin tener que realizar los trazos.

Notas importantes

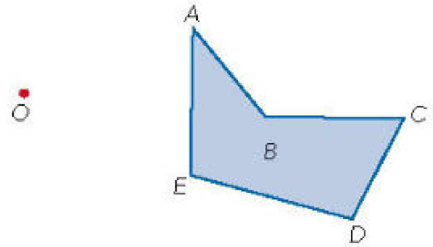
Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

A dos imágenes proyectadas a partir de un mismo centro de homotecia, se les conoce como *composición de homotecia con un mismo centro*.

Lo que aprendí

1. Analiza las siguientes situaciones y, de acuerdo con las consideraciones de proporcionalidad para las figuras homotéticas, realiza lo que se indica.

a) Traza la figura homotética del siguiente polígono, de manera que la razón de homotecia sea 2:1.



b) Propón un polígono y en una hoja blanca traza su figura homotética, cuya razón de homotecia sea −1.

c) Intercambia tu figura con otro compañero y realicen lo mismo que en el inciso b.

d) A partir del centro de homotecia, tracen dos figuras homotéticas.

e) Expongan al grupo sus trazos y, en caso de haber diferencias, argumenten y lleguen a una conclusión grupal.

Desafío

1. Analiza y resuelve el siguiente problema.

Andrés fue al cine y se sentó hasta la última fila para ver la película. Desde ahí puede observar una casa cuya altura es de 2 m. Si se acerca a la mitad de la sala del cine, donde la pantalla le queda a 15 m, puede ver la misma casa, ahora de 4 m. ¿A qué distancia de la pantalla queda la última fila?

____

Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Enlázate

Consulta en la siguiente página algunas consideraciones sobre homotecia y complementa tus conocimientos. Comparte con tus compañeros si encontraste algo que te parezca interesante. http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 15:12 horas.)

Además, en la siguiente dirección encontrarás otros problemas que requieren del estudio de las figuras homotéticas para su solución. Elige alguno de ellos y exponlo al grupo. Junto con tu profesor complementen sus aprendizajes. http://www.thatquiz.org/es/previewtest?G/I/Y/B/W3BF1368788931. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 15:15 horas.)

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Lección 18: Gráficas de funciones cuadráticas

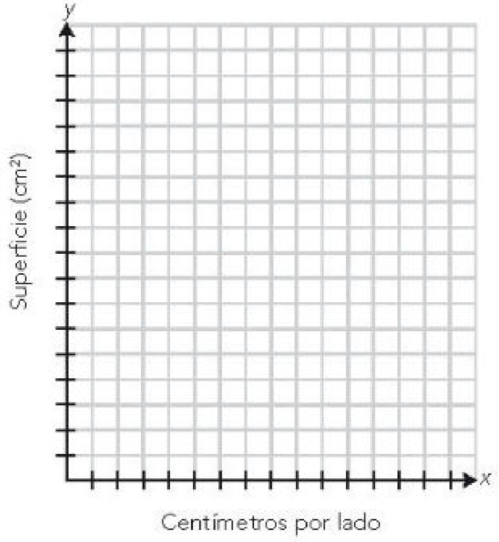
Lo que sabes

1. Analiza la siguiente situación y realiza lo que se indica.

   a) Una pieza cuadrada de cerámica se recubre de barniz por ambas caras. ¿Cuál es la superficie que se recubrirá, si las piezas son de 3, 5, 8, 10 y 15 cm por lado? __________

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? __________
   - Completa la tabla con los datos que represente esta situación.
   - Realiza una gráfica con los datos de la tabla.

Centímetros por lado	Superficie (cm^2)



   - ¿Qué tipo de variación es la anterior? __________

     Argumenta tu respuesta. __________

   - Compara tus respuestas con las otros compañeros y argumenta en caso de que tengan distintos resultados.

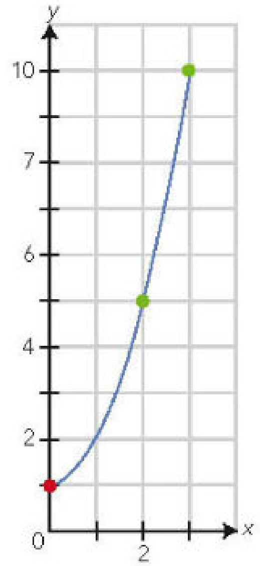
Actividades

1. Considerando las situaciones de variación realicen lo que se indica.

   a) Analicen la siguiente gráfica y contesten.

   - ¿Cuál es el valor de y si x es igual a 1? __________
   - ¿Cómo se obtiene el valor de y a partir de cualquier valor de x? __________
   - Completen la tabulación que corresponde a esta gráfica.

x	y
0	
1	
2	
3	
4	
5	

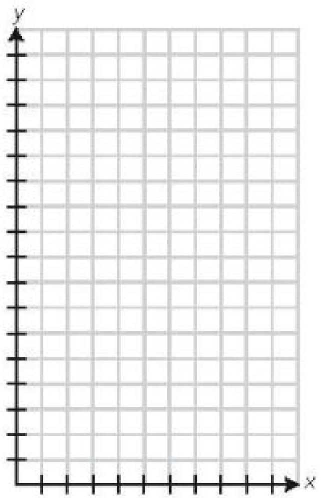


   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta función? __________

   b) En la siguiente tabla se presenta la relación entre el área de un círculo y la medida de su radio. (Consideren el valor de $\pi = 3.14$)

   - ¿Cuál es la fórmula para obtener el área del círculo? __________
   - ¿Cómo se representa en forma de una función de x la fórmula para obtener el área? __________
   - ¿Cuál es la variable dependiente? __________
   - ¿Cuál es la variable independiente? __________

- Completen la tabla y construyan la gráfica que corresponde a esta situación.



Radio cm	Área cm²
0	
1	3.14
2	
3	
4	50.24
5	

c) En cierto laboratorio se observó el aumento de la población de una bacteria por cada día y se representó en la siguiente tabla.

Número de días	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	3	12	27	48	75

- ¿Cuántas bacterias habrá en 10 días? ______
- ¿Cómo se sabe la cantidad de bacterias que se tendrán en cada día? ______
- ¿Cuál es la expresión que modela a esta función? ______
- Construyan, en su cuaderno, la gráfica representa esta situación

d) Comparen sus respuestas y gráficas con las otras parejas. En caso de tener diferencias, argumenten sobre ellas y corrijan de ser necesario.

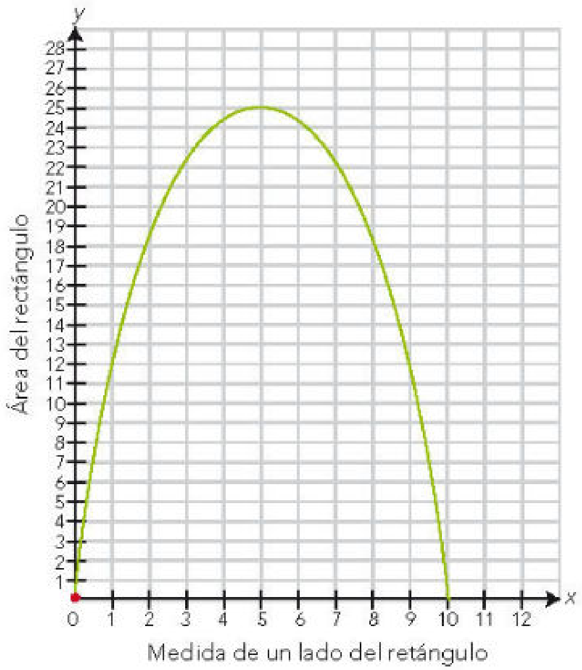
2. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se indica.

a) A un equipo de alumnos se les dio un trozo de alambre de 20 cm, con el cual deben formar un rectángulo de manera que tenga la mayor área posible.

- ¿Cuál será el perímetro del rectángulo que formarán? ______
- Si un lado mide 3 cm, ¿cuánto mide el otro lado? ______ ¿Cuál es el área en este caso? ______

Argumenten su respuesta. ______

- Para esta situación se presentó la siguiente gráfica.



b) ¿Por qué la curva no debe rebasar el eje de las abscisas? ______

c) ¿Cuántos rectángulos de 20 cm de perímetro pueden formarse? ______

d) ¿Cuánto miden los lados cuando el área es igual a 21 cm²? ______

e) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima? ______

f) Completen la tabla con base en la gráfica anterior. Consideren *x* como el largo del rectángulo.

Largo	Ancho	Área

g) Con base en la medida del largo, indiquen cuál es la función que origina la gráfica anterior (justifiquen su respuesta). ____________________

h) Expongan al grupo sus resultados y, con la orientación de su profesor, discutan y argumenten en caso de tener diferencias.

Lo que aprendí

1. Analiza las siguientes situaciones de variación cuadrática y contesta lo que se indica

a) La siguiente gráfica representa el área de la imagen que se forma de acuerdo con la distancia a la que se coloca el proyector.

- Traza la gráfica que corresponde, uniendo los puntos.
- Argumenta si es correcto o no unir los puntos con líneas rectas.

____

- ¿A qué distancia se coloca el proyector para que la imagen tenga un área de 4 m^2?

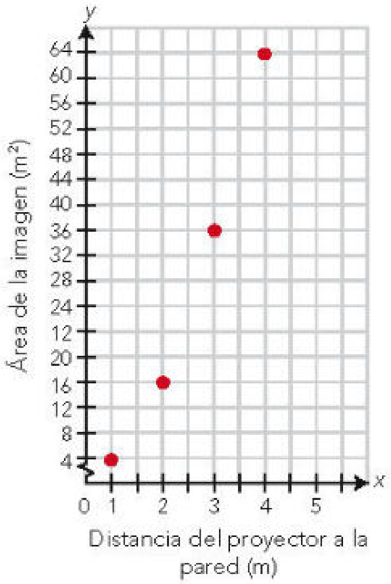
____

- ¿Cuál es el área de la imagen en la pantalla si el proyector se encuentra a una distancia de 5 m?

____

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la imagen proyectada en función de la distancia a la que se coloca el proyecto?

____



- Utiliza la expresión anterior para encontrar a qué distancia se debe colocar el proyector, de manera que el área de la imagen sea de 24.01 m^2.

$d =$ ______

- Completa la tabla.

Distancia entre el proyector y la pared (m)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Área de la imagen (m^2)									

b) La fórmula para determinar la distancia que recorre un objeto que cae está definida de la siguiente forma:

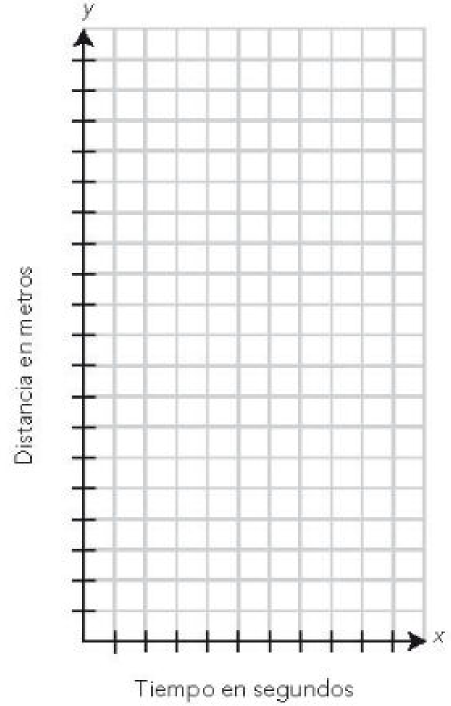
$$d = \frac{gt^2}{2}$$

Donde:
d = distancia
t = tiempo
$g = 9.81\frac{m}{s^2}$

- Con base en ésta, determina la distancia que recorre una boya que es lanzada al mar desde un helicóptero a una altura de 500 metros en 1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 segundos. Completa la tabulación.

Tiempo transcurrido (seg)	0	1	2	3	4	5	8	10
Distancia de caída (m)								

- Construye la gráfica que corresponde a esta situación.



- ¿Cuánto tiempo tarda la boya en caer al mar? ____________________
- Compara con otros compañeros y verifica tus resultados

c) Investiga alguna situación que pueda representarse mediante una gráfica que corresponda a una función cuadrática. Tabula y grafica en tu cuaderno.

- Organizados por su profesor, expongan al grupo su investigación y copien alguna que les haya parecido más representativa de una función cuadrática.

Notas importantes

Lee la siguiente información para ampliar tus ideas.

Las funciones cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números y a distinto de 0 (el valor de b y c si puede ser 0), se llaman cuadráticas y se representan mediante parábolas con su eje paralelo al eje y.

Estas parábolas son más o menos abiertas y con las ramas hacia arriba o hacia abajo, según el valor de a.

Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba.

Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo.

Además, cuanto mayor sea $|a|$, es decir, el valor absoluto de a, menos abierta es la parábola.

Por ejemplo:

En la función $y = 3x^2$ (en donde $3 > 0$), las ramas abren hacia arriba y se dice que la parábola es positiva.

En la función $y = -3x^2$, (en donde $-3 < 0$), las ramas abren hacia abajo y se dice que la parábola es negativa.

Desafío

1. Considerando el problema del alambre, expresen algebraicamente el área del siguiente rectángulo. En su cuaderno construyan una tabla de valores para validar la expresión obtenida.
   - Pista:

   - Recuerden que el alambre mide 20 cm.
   - De manera grupal, y con el apoyo de su profesor, analicen su resultado, argumenten y corrijan en caso de ser necesario.

Enlázate

Entra en la siguiente dirección en internet: http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDAsIndpbmRvdyI6WyItNC4xNTk5OTk5OTk5OTk5OTgiLCI0LjE1OTk5OTk5OTk5OTk5OCIsIi0yLjU1OTk5OTk5OTk5OTk5OSIsIjIuNTU5OTk5OTk5OTk5OTk5Il19XQ. (Consulta: 14 de diciembre de 2012 a las 23:33 horas.)

- En la ventana de "función" escribe alguna función cuadrática y observa el plano para colocar el exponente de la función debes usar el símbolo "^". Escribe una familia de curvas, por ejemplo: $3x^2 + 3$, $4x^2 + 3$, $5x^2 + 3$ o $3x^2 - 3$, $3x^2 + 4$, $3x^2 + 5$; una en cada ventana de función; para ello haz clic en "añadir" y agrega otra función.
- ¿Qué sucede con la parábola al graficar la primera familia de funciones que se te propuso? ____________
- ¿Qué sucede con la parábola al graficar la segunda familia? ____________
- Propón alguna familia de funciones cuadráticas y analiza cómo se comportan.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Lección 19: Gráficas formadas de secciones rectas y curvas

Lo que sabes

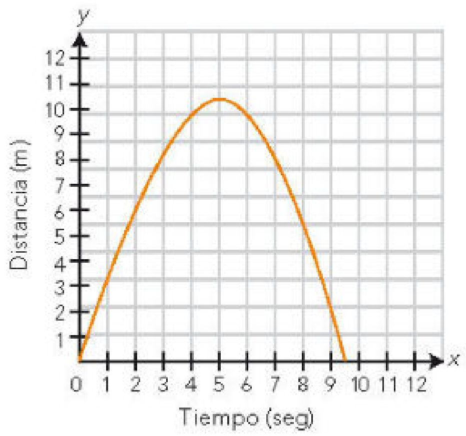
1. Analiza las siguientes situaciones de variación y contesta lo que se indica.

   a) El motor de un avión a escala consume 0.25 litros de gasolina en media hora. Si durante una competencia vuela durante 5 horas, ¿cuánta gasolina consume? ____________

   - Elabora, en tu cuaderno una tabla y una gráfica en las que se observen el gasto de gasolina en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 horas.
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta función? ____________
   - ¿Por qué es una proporción? ____________
   - Con los datos de la tabla, traza una gráfica en la que se represente esta función.
   - Explica las características que tiene esta gráfica. ____________

   b) Si se lanza una pelota hacia arriba, la gráfica que representa esta situación es la siguiente.

   - ¿Por qué inicia y termina en cero? ____________
   - ¿En qué momentos tiene mayor velocidad? ____________
   - Argumenta si es o no correcta la siguiente afirmación: "La pelota alcanza mayor altura cuando no tiene velocidad". ____________

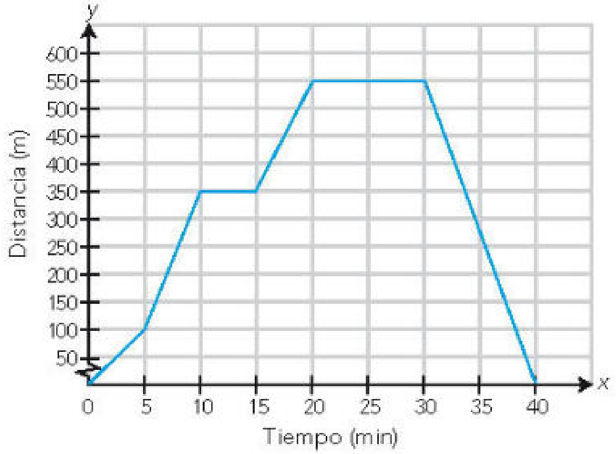


   - Compara tus resultados y, con apoyo de su profesor, establece el porqué son gráficas con diferentes características.

Actividades

1. Reflexionen sobre las siguientes situaciones y contesten lo que se indica.

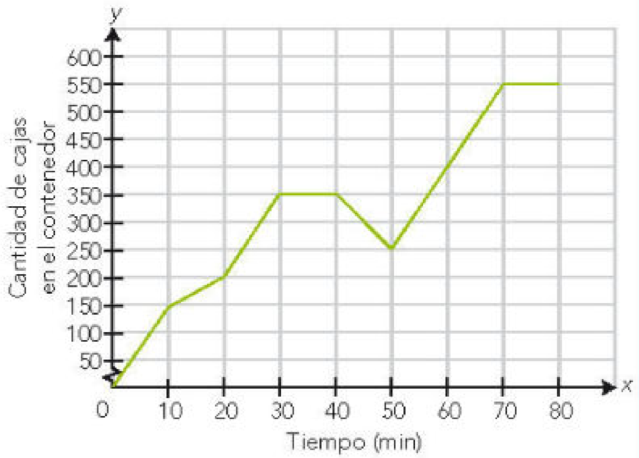
a) Un ayudante de un taller mecánico fue a comprar refacciones. Su recorrido se muestra en la siguiente gráfica.



- ¿Por qué inicia y termina en cero? ______
- ¿A qué distancia del taller queda la refaccionaria? ______
- ¿Cuánto tiempo tardó en comprar la refacción? ______
- ¿Se detuvo antes de llegar a la refaccionaria? ______ Argumenten su respuesta. ______
- ¿Qué distancia recorrió en total? ______
- ¿Entre qué minutos fue más veloz? ______ Argumenten su respuesta. ______
- Argumenten sobre el tiempo que habría tardado si sólo hiciera el recorrido de ida y vuelta, sin detenerse y considerando la velocidad en el tramo que fue más rápido. ______

b) Una máquina empacadora de dulces alimenta una banda donde deposita las cajas con las bolsas de dulces. De manera manual se retiran de la banda Cuatro cajas, para lo cual detienen la alimentación de la máquina .

- ¿Cuántas cajas de dulces hay en la banda durante los primeros 10 minutos? ______
- ¿Y cuántas en el minuto 20? ______ ¿Por qué? ______

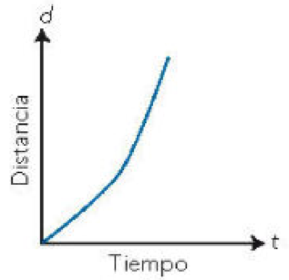


- ¿Cuánto tiempo detienen la máquina para descargar la banda? ______
- ¿Cuántas cajas quedaron en el contenedor al minuto 80? ______
- ¿Qué representa el segmento horizontal dentro de esta gráfica? ______

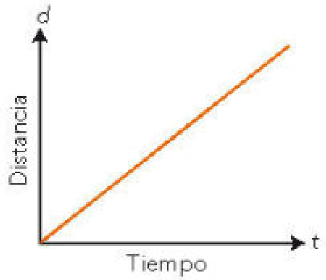
c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Argumenten en caso de tener diferencias y corrijan de ser necesario.

2. Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.

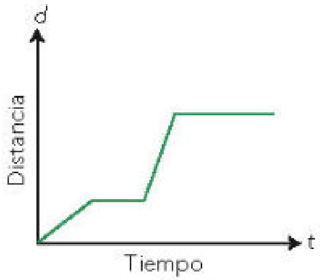
a) Las siguientes gráficas corresponden al recorrido de tres automóviles, obsérvenlas y escriban frente a cada oración el número que le corresponda. Posteriormente argumenten el porqué de cada respuesta.



Grafica 1



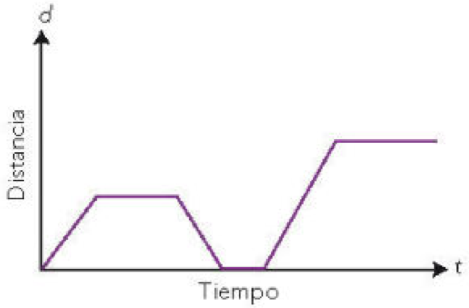
Grafica 2



Grafica 3

- Un automóvil avanzó a una velocidad constante. ______
  Explicación: ______
- Un automóvil avanzó aumentando su velocidad, se detuvo y luego fue más rápido hasta detenerse nuevamente. ______
  Explicación: ______
- Un automóvil avanzó y aumentó su velocidad en cada minuto. ______
  Explicación: ______
- Expongan al grupo sus argumentos y, con la orientación de su profesor, elaboren una conclusión sobre la forma de interpretar las gráficas. Escriban sus conclusiones. ______

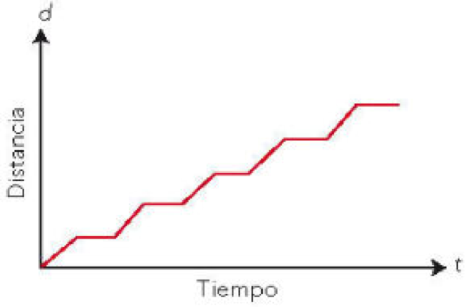
b) Apoyados en las conclusiones anteriores escriban un enunciado que corresponda a la siguiente gráfica.



- Enunciado. ______

c) La siguiente gráfica representa el recorrido de un autobús escolar.

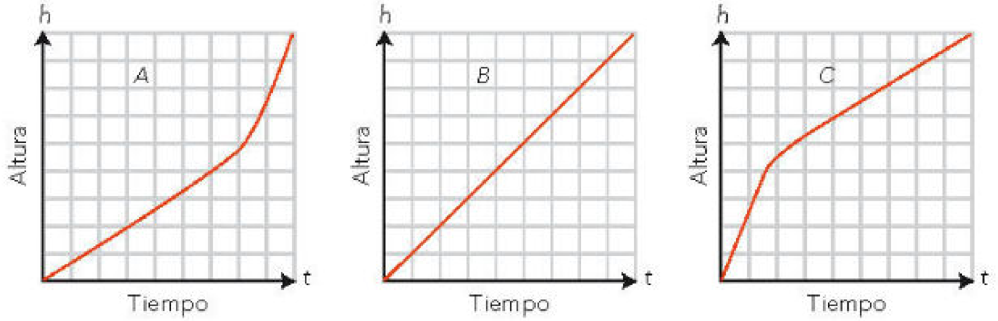
- ¿Cuál es el significado de las líneas inclinadas? ______
- ¿Y el de las líneas horizontales? ______
- Escriban dos situaciones en las que se pueda utilizar esta misma gráfica. ______



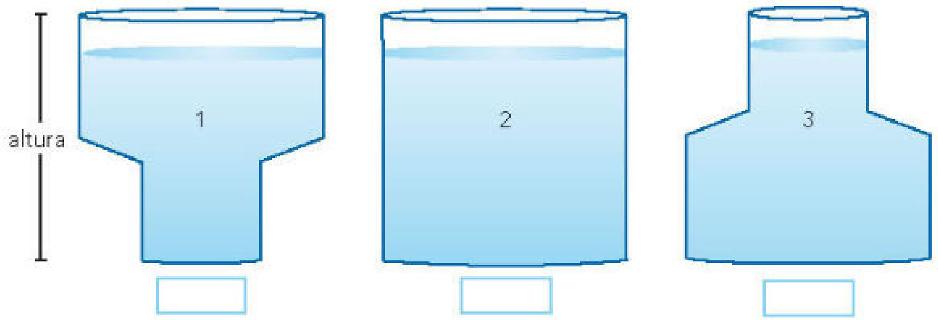
d) Tracen en su cuaderno, una gráfica que represente las siguientes situaciones.

- Al finalizar un concierto, hubo un silencio abrumador. Entonces una persona en la audiencia comenzó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron, y de pronto, todos aplaudían y animaban a la orquesta.
- ¿Cómo es que el costo de una bolsa de papas fritas depende de su peso?
- ¿Cómo se representaría una pelota mientras rebota en el piso después de ser lazada desde cierta altura?
- Expongan sus gráficas al grupo y argumenten sobre ellas en caso de haber diferencias.

3. Las siguientes gráficas corresponden al llenado constante de algunos recipientes según el tiempo, y de acuerdo con su forma y altura.

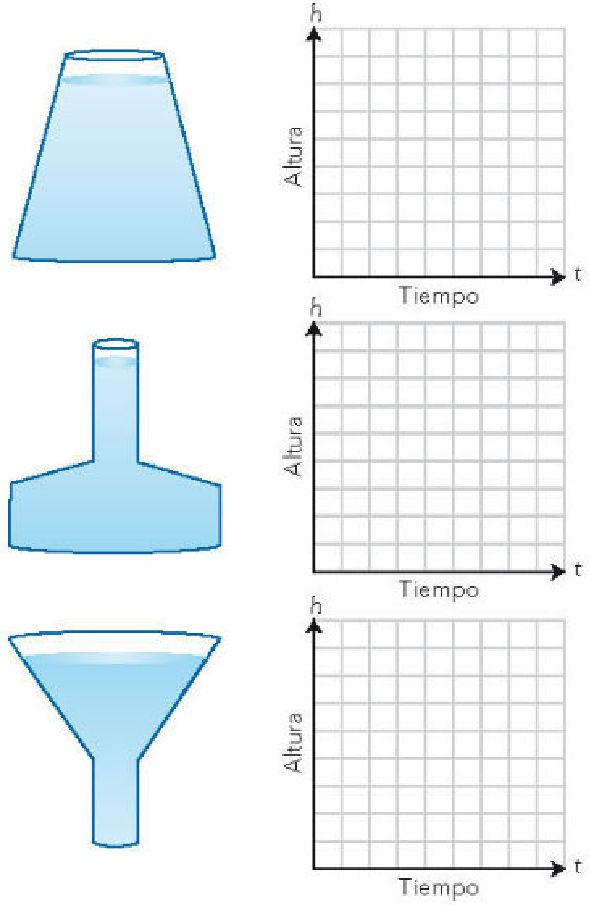


- Reflexionen sobre la forma de los recipientes y relacionen las gráficas con uno de ellos, anoten en el recuadro la letra correspondiente.



- ¿Cómo se relaciona el hecho de que la gráfica sea una línea recta con la forma del recipiente? ______
- Si el recipiente es más ancho, ¿el llenado será más lento o más rápido? ______ Argumenten su respuesta. ______
- Expliquen lo que sucede en el recipiente 1 y la gráfica que le corresponde. ______
- ¿Cuál es la diferencia con el recipiente 3 y su gráfica? ______
- Con apoyo de su profesor, expongan al grupo sus respuestas. Elaboren una conclusión al respecto y escríbanla. ______

4. Tracen la gráfica que corresponda al llenado de los siguientes recipientes.



- Comparen las gráficas con las de otros equipos, argumenten sus trazos y en caso de haber diferencias, confronten sus puntos de vista para obtener conclusiones generales.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Una gráfica puede modelar distintas situaciones a través de secciones rectas y curvas en el plano. Generalmente corresponden a la representación de movimiento y llenado de recipientes, aunque pueden referirse a otras cuestiones que se relacionan o dependen del tiempo.

Cuando la gráfica se compone de secciones rectas, puede interpretarse de la siguiente forma:

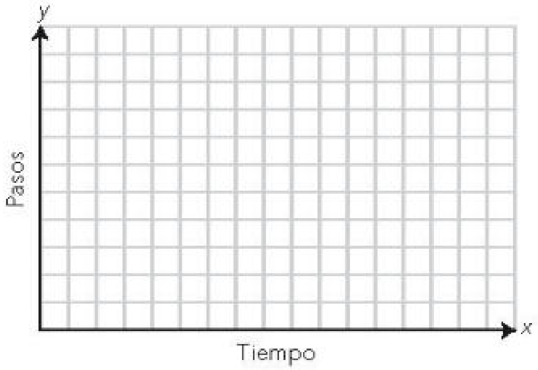
- Mientras mayor sea el ángulo de inclinación (con respecto a x) es más rápido el movimiento o llenado; si es menor el ángulo, es más lento el llenado.
- Si la línea es paralela a x, indica que se detiene.

Si la gráfica tiene sección curva, entonces aumenta o disminuye en cada momento (según la unidad de tiempo que se considere).

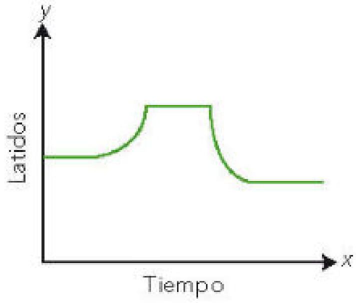
Lo que aprendí

1. Tomando como base las características para modelar gráficamente situaciones de movimiento y llenado de..., realiza lo que se indica.

a) Representa en la siguiente gráfica el recorrido que realizas de tu casa a la escuela. Considera la cantidad de pasos que das y el promedio de tiempo (minutos). Recuerda que cuando no caminas consumes tiempo.



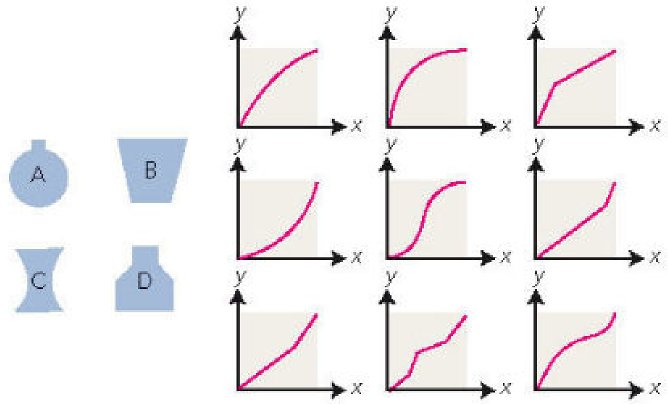
b) La siguiente gráfica corresponde al número de latidos del corazón de una persona que realizó algunos ejercicios. Explica con tus propias palabras lo que sucedió en esta situación.



- ¿Qué sucedió con la actividad del corazón de esta persona? ______

______

c) Analiza las gráficas y coloca sobre ella la letra que corresponda al vaciado del recipiente que se está modelando.



- En tu cuaderno, realiza el dibujo de un recipiente con alguna de las gráficas que no hayas señalado.

d) Compara tus respuestas y gráficas con las de otro compañero. Juntos elaboren conclusiones sobre la forma de interpretarlas y trazarlas. Escriban sus conclusiones. ______

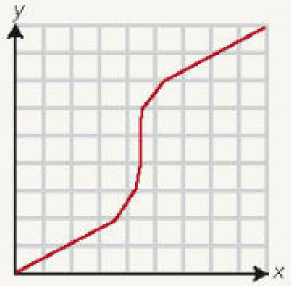
______

______

Desafío

1. La siguiente gráfica corresponde a la altura del agua al llenar un recipiente. El líquido se vierte de manera constante. Realiza el dibujo que represente su forma.

Recipiente



- Compara tu dibujo con el de otros compañeros. Argumenten por qué hubo o no diferencias.

Enlázate

Utiliza la actividad que se presenta en la siguiente página y comprueba tus respuestas a los ejercicios de llenado de recipientes. http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349685328. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 15:37 horas.)

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Lección 20: Probabilidad de eventos independientes

Lo que sabes

1. Analiza lo siguiente y contesta. Toma en cuenta las características para calcular la probabilidad.

Se lanza una moneda y al mismo tiempo se extrae una tarjeta de una urna, en la que hay 6 tarjetas rojas, 4 verdes, 8 blancas y 7 azules. Analiza cada uno de los siguientes eventos y contesta.

A. Cae sol y se extrae una tarjeta blanca.

B. Cae águila y se extrae una tarjeta azul.

C. Extraer una tarjeta blanca y, sin regresarla, extraer una tarjeta verde.

D. Extraer una tarjeta y, si es roja, se lanza la moneda.

- ¿De los eventos anteriores cuál o cuáles son independientes? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer de la urna una tarjeta azul? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila al lanzar la moneda? ____________________
- ¿Cuál es el color de tarjeta que tiene el 32% de probabilidad de obtenerse? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que se dé el evento *a* o el *b*? ____________________
- ¿A qué se le llama eventos independientes? ____________________

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexiona sobre las diferencias que hayan encontrado.

Actividades

1. Analicen los siguientes experimentos y contesten.

Al lanzar un dado, se quiere obtener los siguientes eventos.

A. Que se obtenga un número par.	B. Que se obtenga un número múltiplo de 3.
C. Que se obtenga un número mayor a 2.	D. Que se obtenga 5.

a) ¿Cuáles son los casos favorables para cada uno de los siguientes eventos?

- Evento A. ____________________
- Evento B. ____________________
- Evento C. ____________________
- Evento D. ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada evento?

- Probabilidad del evento A. ____________________
- Probabilidad del evento B. ____________________
- Probabilidad del evento C. ____________________
- Probabilidad del evento D. ____________________

c) La probabilidad de que ocurra A y B es $\frac{1}{6}$

- Probabilidad de A. ____________________
- Probabilidad de B. ____________________
- ¿Cómo se calcula la probabilidad de A y B? ____________________

d) Expliquen por qué la probabilidad que se den ambos eventos es menor a la probabilidad de darse cada uno de ellos. ____________________

- La probabilidad de que ocurra C y D. ____________________

  Probabilidad de C. ____________________

  Probabilidad de D. ____________________

  ¿Cómo se determinó la probabilidad de C y D? ____________________

- La probabilidad de que ocurra A, B y D. ______
- Probabilidad de A. ______
- Probabilidad de B. ______
- Probabilidad de D. ______
- ¿Cómo se calculó la probabilidad de A y B y D? ______

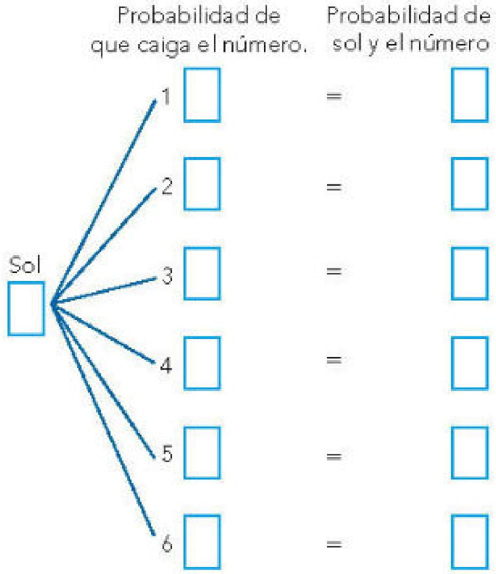
e) Expliquen por qué la probabilidad de que se den los eventos es menor a la probabilidad de darse cada uno de ellos. ______

f) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan tenido.

g) De manera grupal, y con la ayuda de su profesor, concluyan sobre cómo se determina la probabilidad de que ocurran o no dos o más eventos independientes. Escriban su conclusión. ______

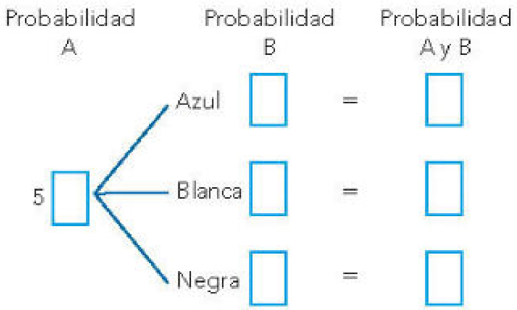
2. Analicen cómo se usa el diagrama de árbol para determinar la probabilidad de eventos independientes y contesten las preguntas.

a) Se lanza una moneda y un dado. Escriban dentro del recuadro la probabilidad de cada evento.



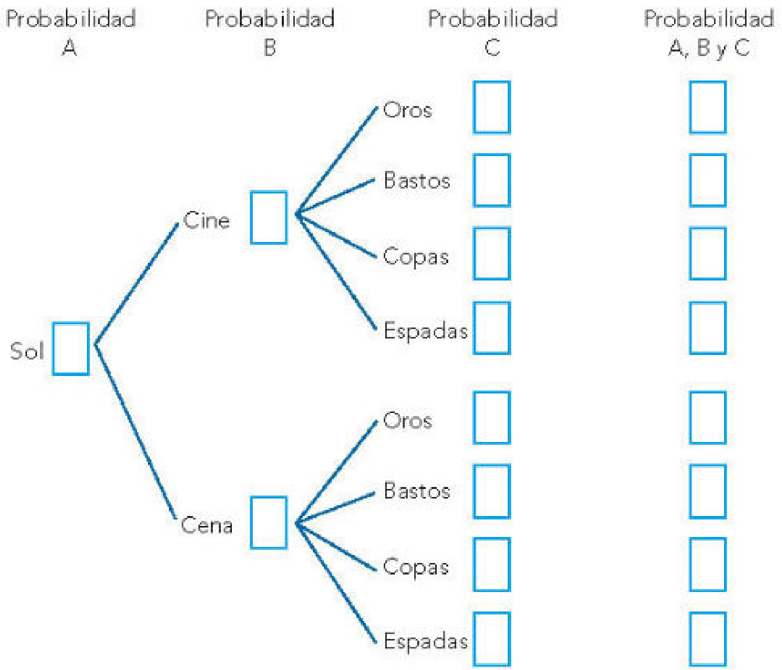
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y 2? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y 4? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y 6? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y un par? ______

b) Se lanza un dado y se extrae una tarjeta de una urna donde hay 7 tarjetas azules, 4 blancas y 9 negras.



- Argumenten si la probabilidad de extraer una tarjeta azul y un 5 debe ser mayor a $\frac{7}{20}$. ______
- Argumenten si la probabilidad de extraer una tarjeta azul y un 5 debe ser mayor a $\frac{1}{6}$. ______
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una tarjeta azul y un 5? ______
- ¿Cómo se puede verificar que la probabilidad obtenida es correcta? ______

c) El papá de María, Juan y Bertha, les ha dicho que invitará al cine al que gane después de realizar los siguientes experimentos. Lanzarán una moneda, se extraerá una esfera de una urna que contiene 4 tarjetas con la palabra "cine" y 6 con "cena". Además deben escoger una de las cartas que él tiene. Estás son 5 de bastos, 8 de copas, 3 de oros y 4 de espadas.



María escogió: sol, cine y copas

Juan escogió: sol, cena y espadas

Bertha escogió: águila, cine y bastos

- María afirma que la probabilidad de que ganen los que escogieron Cine debe ser menor a $\frac{1}{5}$. Argumenten por qué lo que afirma ella es correcto o no.
- ¿Quién de los tres tiene mayor posibilidad de ganar ir al cine?
- Comparen sus resultados con los de otras parejas y verifiquen que sean correctos. Además reflexionen sobre la utilidad que tiene el diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que se den dos o más eventos. Escriban sus conclusiones.

3. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Armando tiene que visitar a dos de sus clientes. El cliente *x* tiene una probabilidad de que le compre de 65%, y el cliente *y* del 35%. Armando debe mostrar tres productos. El producto *M* tiene una probabilidad del 30%, el *N* de 45%, y el *P* de 25%. Si al final del día vendió el producto *P*, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya sido vendido al cliente *y*?

b) Los grupos *A*, *B* y *C* de cierta escuela tienen 50 alumnos cada uno. Del grupo *A*, 27 aprobaron matemáticas. Del grupo *B*, 30 tienen 15 años, 16 tienen 14 años y el resto 13 años. Y del grupo *C*, 20 viven en la misma colonia y el resto viven en colonias aledañas a la escuela. El Director mando llamar a un alumno de cada grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que los alumnos escogidos hayan reprobado matemáticas, tengan 13 años y vivían en la misma colonia, respectivamente?

c) Comparen sus resultados con los de otros compañeros y verifiquen que sean correctos.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas aplicando la regla del producto.

a) Se realizan tres volados de manera consecutiva. Determina entonces las siguientes probabilidades.

- ¿Qué los tres sean águilas?
- ¿Qué los resultados sean sol, águila, sol?

- ¿Qué los dos primeros sean águila?

2. En el mercado "La Tolva" se debe escoger la nueva dirigencia. Se elige un presidente y un secretario de entre los 30 locatarios, de los cuales sólo 13 son hombres. ¿Cuál es la probabilidad de...

a) ...qué el presidente sea hombre y el secretario sea mujer?

b) ...qué el presidente sea mujer y el secretario se hombre?

3. Compara tus resultados y reflexiona sobre las diferencias que hayas encontrado.

Desafío

1. Analiza el problema siguiente y responde lo que se pide.

En una urna hay 16 tarjetas que tienen la palabra "aceptado", 25 la palabra "rechazado" y 9 con "en espera". En otra urna hay 20 esferas: 7 tienen el 1 (primer turno), 8 el 2 (segundo turno) y el resto el 3 (tercer turno). Y en otra, tres fichas con las leyendas "enero", "mayo" y "septiembre" respectivamente.

El evento que Andrea quiere obtener tiene una probabilidad del $\frac{1}{15}$. ¿Cuál es?

Notas importantes

Lee la siguiente información para complementar tus ideas.

Dos eventos son independientes cuando el espacio muestral de ellos no se ve afectado al realizarse uno u otro. Por ejemplo, al realizar tres volados y determinar si caerá águila o sol, cada uno de los volados no afecta el resultado del otro.

Para obtener la probabilidad de varios eventos que son independientes y que se quiere que se den los dos, por ejemplo, obtener un 3 al lanzar un dado y águila al lanzar una moneda, se emplea la regla del producto, ya que las probabilidades de obtenerse se reducen.

En el evento mencionado, la probabilidad sería:

Obtener 3: $\frac{1}{6}$

Obtener Águila: $\frac{1}{2}$

La probabilidad de que ambos eventos se den, se calcula así:

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

La probabilidad es de $\frac{1}{12}$.

Evaluación tipo PISA

El cumpleaños

Lucia y Emmanuel, hijos de Leopoldo, cumplen años el mismo día. Alguien preguntó, ¿cuántos años cumplen cada uno? Leopoldo sólo respondió "el producto de sus edades es de 224 años y la suma es 30 años".

Pregunta 1: Empleando la formula general para resolver este problema, ¿cuál son los valores correspondientes para *a*, *b* y *c*?

a) $a = -1$; $b = +30$ $c = +224$

b) $a = +1$; $b = +30$ $c = +224$

c) $a = -1$; $b = -30$ $c = -224$

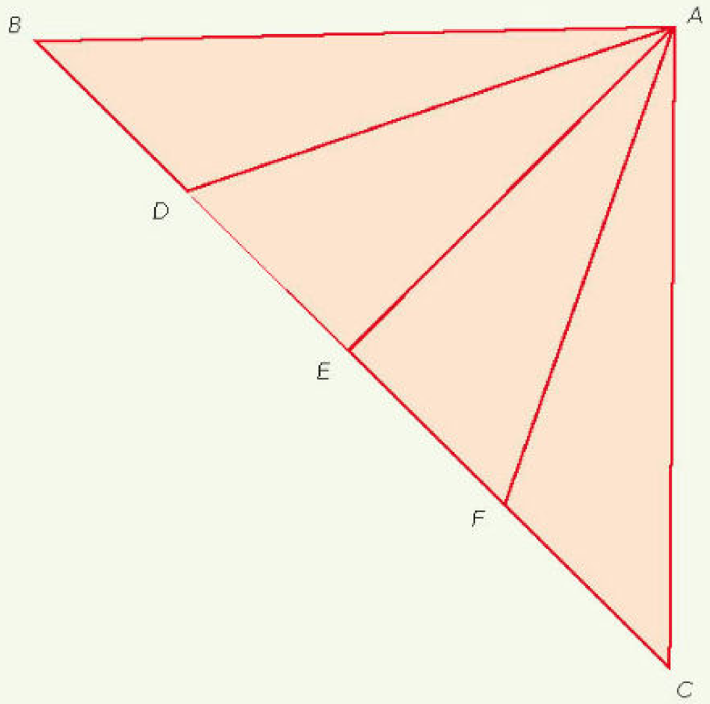
d) $a = -1$; $b = +30$ $c = -224$

Pregunta 2: ¿Cuántos años tiene cada uno de ellos? ______________________________

____

La ménsula

Andrés solicito a un herrero que le hiciera una estructura para colocar una repisa. El herrero le propuso el siguiente modelo y le explicó: "el triángulo *ABC* es isósceles, la base se ha dividido en cuatro partes iguales y se formó igual número de triángulos."



Evaluación tipo PISA

Pregunta 1: ¿Cuáles triángulos son congruentes? Si el par de triángulos proporcionados son congruentes elige "Sí"; de lo contrario elije "No".

Par de triángulos		
ADB y *AED*	Sí	No
ADB y *ACF*	Sí	No
AFE y *AED*	Sí	No
ADB y *AFE*	Sí	No

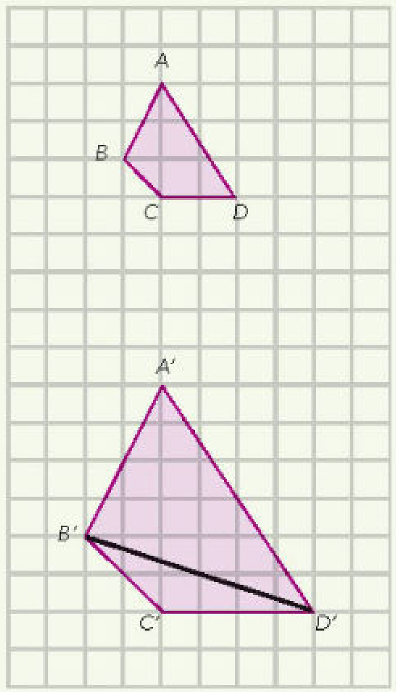
Pregunta 2: Argumenta por qué se puede afirmar que los triángulos son congruentes. ______________________________

____

____

Figuras semejantes

Considerando que cada cuadrito de la cuadrícula tiene 36 mm².



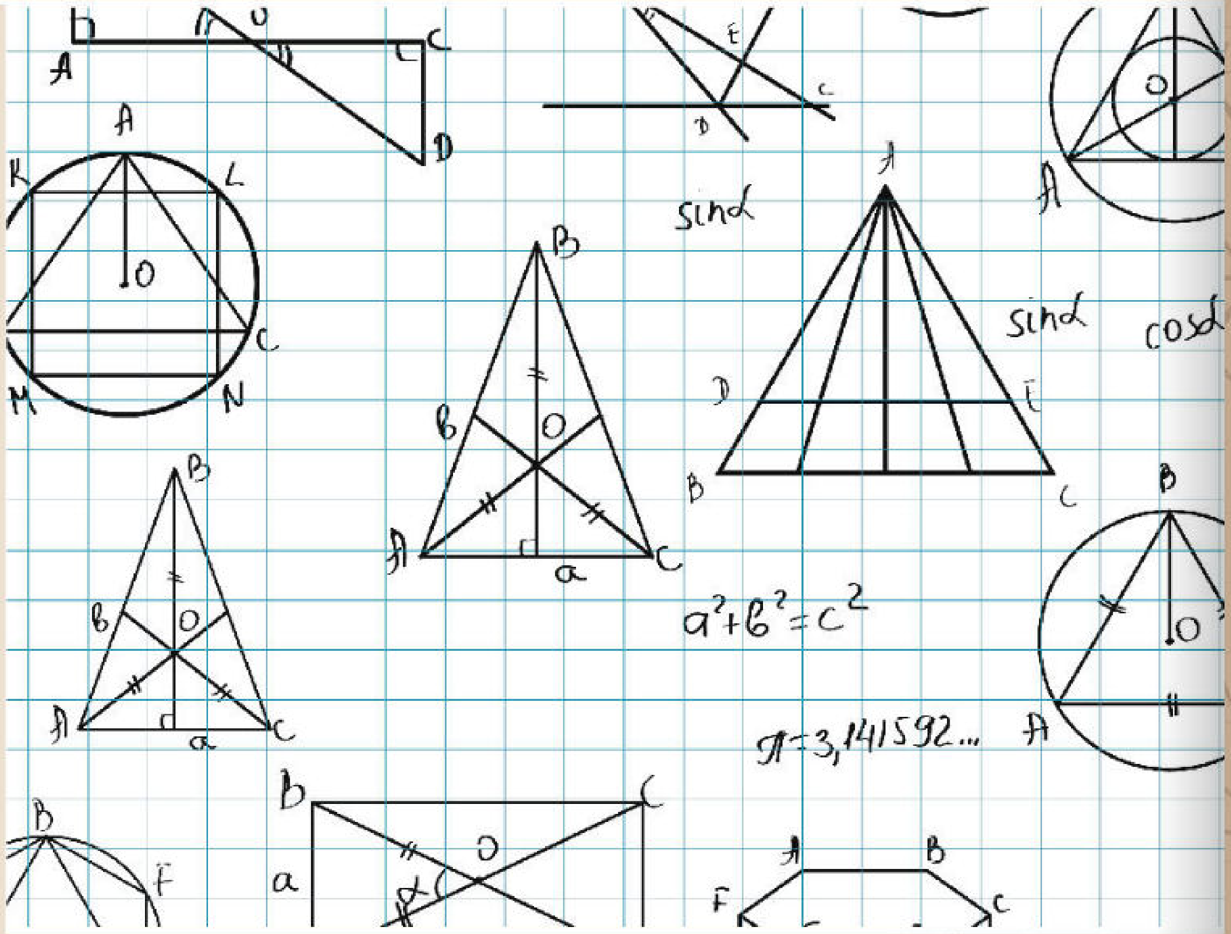
Pregunta 1: ¿Cuál es la longitud del segmento *B'D'*? ______________________________

Pregunta 2: Argumenta por qué se puede afirmar que las figuras son semejantes. ______________________________

____

BLOQUE 4

Matemáticas 3



Cualquier nueva serie de descubrimientos es Matemática en forma, debido a que no podemos tener otra guía.

Charles G Darwin

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientes

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Lección 21: Sucesiones cuadráticas

Lo que sabes

1. Analicen las siguientes figuras y realicen lo que se indica.

   a) Dibujen las figuras cinco y seis.

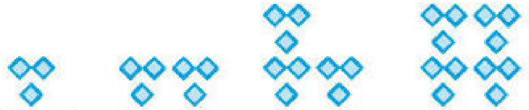


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

- ¿Cuántos rombos tendrá la figura 7? ______
- ¿Cuántos tendrá la figura 10? ______
- Si n representa a la figura 1, ¿cuál es la expresión que permite calcular el número de rombos de la figura 2? ______
- ¿Cómo se puede calcular el número de rombos de cualquier figura? ______

2. Andrés trabaja en una bodega acomodando cajas. En cierta ocasión observó que dichas cajas estaban acomodadas como se muestra en la imagen.
   - Dibujen las figuras 4 y 5, que muestran cómo se deben acomodar las cajas de acuerdo con la secuencia.

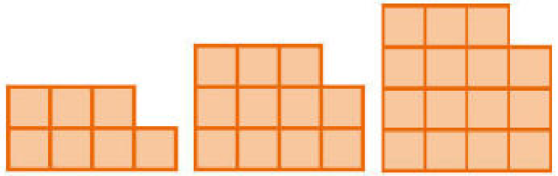


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

- ¿Cuántas cajas deberá acomodar en la figura 4? ______
- ¿Y en la 5? ______
- ¿Cuántas tendrá la figura 15? ______
- Si x representa al número de la figura y y al número de cajas de dicha figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa esta sucesión? ______

3. Supongan que las siguientes sucesiones representan cajas acomodadas en otras bodegas.

   a) Escriban los tres términos que siguen a cada sucesión y la expresión algebraica que permite calcular cualquier término de ella.

- 3, 7, 11, 15, 19, ______, ______, ______ Expresión algebraica. ______
- 8, 17, 26, 35, 44, ______, ______, ______ Expresión algebraica. ______
- 7, 14, 28, 56, ______, ______, ______ Expresión algebraica. ______

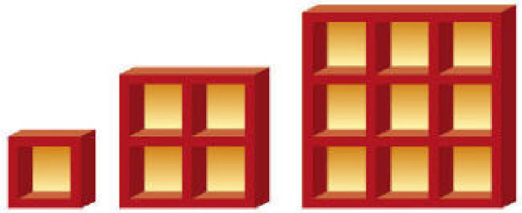
   b) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y, auxiliados por su profesor, confróntenlas y justifíquenlas en caso de que haya diferencias.

   c) Orientados por su profesor acuerden de manera grupal procedimientos para encontrar las expresiones algebraicas de las sucesiones anteriores. ______

Actividades

1. Los empleos de cualquier índole también emplean las matemáticas. Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica. (Pueden auxiliarse de su calculadora).

   a) Roberto es diseñador de muebles minimalistas y le encargaron que realizara un muestrario de libreros. Algunos de sus diseños se muestran en las imágenes.



Librero 1 Librero 2 Librero 3 Librero 4 Librero 5

- ¿Cuántos cuadrados de la menor área conforman al librero 4? ______
- ¿Cuántos al 5? ______
- Supongan que se pueden construir libreros con los cuadrados que se deseen, ¿cuántos cuadrados conformarán al librero 25? ______
- Describan un procedimiento que permita calcular el número de unidades de cualquier figura de esta sucesión. ______
- Argumenten si 784 puede ser el número de cuadrados que conformen algún librero de esta sucesión. ______
- Un librero de esta sucesión tiene 1 156 cuadrados. ¿Qué número de librero le corresponde a esa figura? ______
- Alejandra afirma que si se multiplica por sí mismo el número del librero, se puede saber cuántos cuadros forman parte de dicho mueble. Argumenten si es cierta o no esta afirmación. ______

- Si consideramos que y corresponde al número de cuadrados de cualquier librero y x a la posición que ocupa el librero, ¿cuál es la expresión algebraica con la que se representa cualquier término de la sucesión? ______

b) Consideren los datos de la sucesión anterior y completen la siguiente tabla.

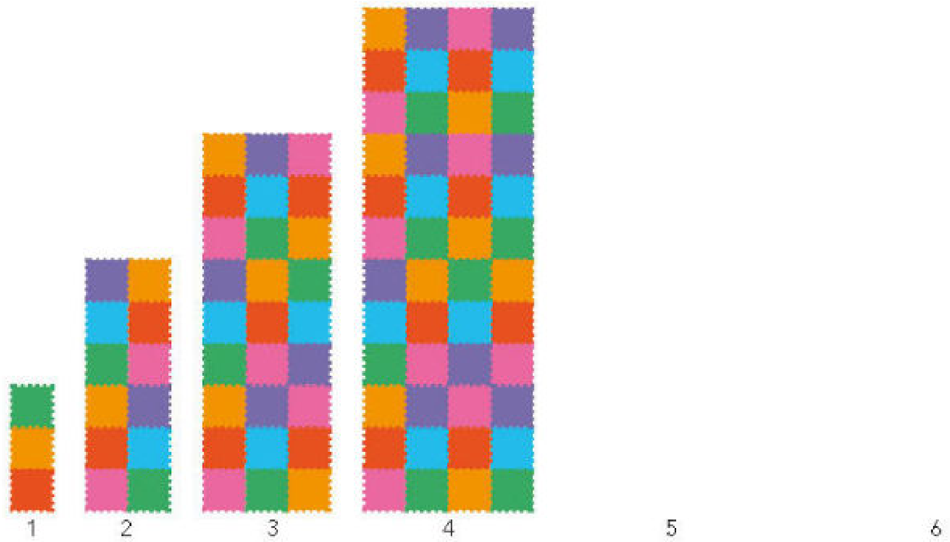
Librero x	Unidades que lo conforman y
1	
2	
3	
4	
5	
25	
n	

c) Coordinados por su profesor, compartan sus respuestas con el resto del grupo y en caso de haber diferencias, justifíquenlas.

d) Acuerden una expresión algebraica que permita calcular cualquier término de esta sucesión.

______

2. Pamela es la encargada de acomodar los tapetes de espuma para los niños en los talleres de cuentacuentos. Le pidieron colocar los tapetes de forma seriada. Dibujen las dos figuras que siguen en la siguiente sucesión y realicen lo que se pide.



a) Escriban las unidades de espuma que tiene cada figura, según se indica.

- Figura 1. Base. ______ Altura. ______
- Figura 2. Base. ______ Altura. ______

- Figura 3. Base. ______ Altura. ______
- Figura 4. Base. ______ Altura. ______
- Figura 5. Base. ______ Altura. ______
- Figura 6. Base. ______ Altura. ______
- Figura 10. Base. ______ Altura. ______
- Figura 25. Base. ______ Altura. ______

b) Comparen sus respuestas con otra pareja y contesten las siguientes preguntas.

- ¿Qué relación hay entre las medidas de la base y la altura de cada figura? ______
- ¿Qué valor le corresponde a la base y a la altura de la enésima figura? Base. ______ Altura. ______

c) ¿Cuántas u^2 de 1×1 tiene cada figura?

- Figura 1. ______ u^2
- Figura 2. ______ u^2
- Figura 3. ______ u^2
- Figura 4. ______ u^2
- Figura 5. ______ u^2
- Figura 6. ______ u^2
- Completen la sucesión numérica correspondiente a las unidades que conforman cada una de las figuras anteriores. 3, 12, ______, ______, ______, ______.
- ¿Cuántas u^2 le corresponden a la figura 10? ______
- ¿Cuántas u^2 le corresponden a la figura 25? ______
- En términos de x y de y, escriban la expresión algebraica que permita conocer el número de u^2 de cualquier figura de la sucesión. ______
- Se sabe que una figura de esta sucesión tiene 2700 u^2. ¿Qué lugar de la sucesión le corresponde? ______

d) Con ayuda de su profesor, compartan las respuestas con el resto del grupo, unifíquenlas y concluyan cómo obtuvieron la expresión para encontrar el enésimo término de esta sucesión cuadrática.

______

e

3. Pamela encontró una tabla que muestra la forma en que debe acomodar los tapetes, analícenla, complétenla y respondan cada pregunta.

a) 4, 16, 36, 64, 100, …

Término x	Valor y
1	4
2	16
3	36
4	64
5	100
6	

- ¿Cuál será el valor correspondiente al séptimo término de la sucesión? ______
- ¿Cuál es la expresión general cuadrática que permite encontrar el enésimo término de esta sucesión? ______
- Confronten con otro equipo la expresión general cuadrática que obtuvieron y, auxiliados por su profesor, unifíquenla.
- Auxíliense de la expresión anterior y encuentren los términos de la sucesión que se piden a continuación.

Término 30. ______ Término 450. ______

Término 99. ______ Término 999. ______

¿En qué término aparece el valor 2 500? ______

b) Escriban la expresión general cuadrática que genera la siguiente sucesión.

8, 32, 72, 128, 200, ... Expresión general cuadrática. ____________

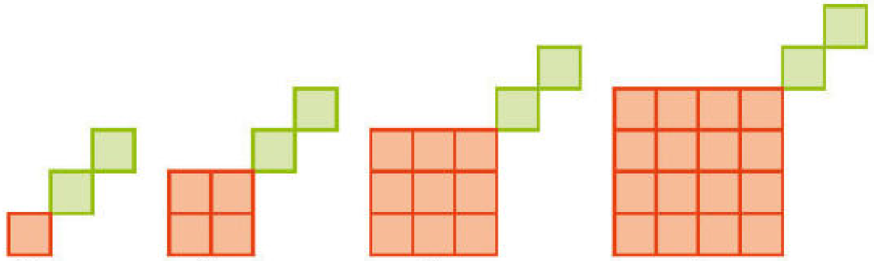
c) Escriban los primeros cinco términos de la sucesión generada por la expresión general cuadrática $y = 7x^2$.

________, ________, ________, ________, ________

d) Confronten sus respuestas con las del grupo y, orientados por su profesor, reflexionen sobre los procedimientos para encontrarlas.

4. Para un taller de cuentacuentos, los niños que asistieron, acomodaron algunos tapetes como se muestran a continuación.

a) Analicen las imágenes, completen la tabla y contesten.



x	y
1	3
2	6
3	11
4	
5	
6	
10	
15	
23	

- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término de la sucesión?

____

- Se sabe que una figura está conformada por 291 piezas. Argumenten si pertenece o no a la sucesión.

____

- Coordinados por su profesor, en plenaria, analicen el procedimiento adecuado para resolver esta sucesión cuadrática. Escriban sus observaciones.

____

b) De la misma manera en que analizaron la actividad anterior, escriban los tres siguientes términos de la sucesión, luego contesten.

4, 7, 12, 19, 28, ________, ________, ________

- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término de esta sucesión?

____

- Utilicen su expresión algebraica y encuentren el número que ocupará la decimonovena posición.

____

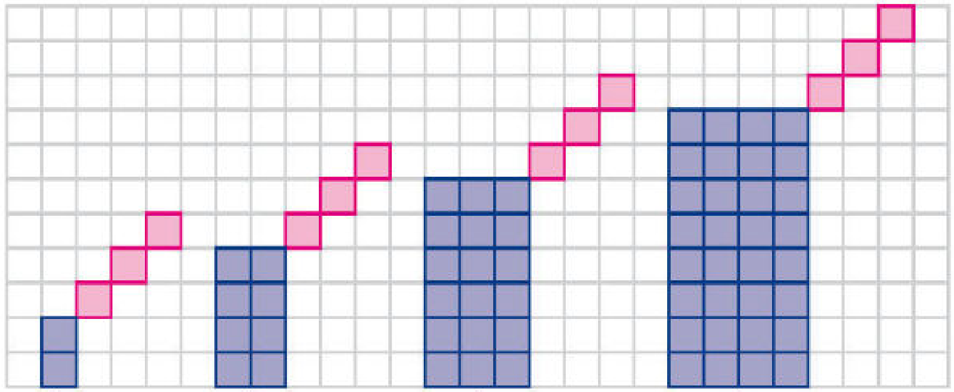
- Argumenten si el número 84 pertenece o no a esta sucesión. ____________

c) Escriban los primeros cinco términos de la sucesión generada por la expresión general cuadrática $y = x^2 + 5$

________, ________, ________, ________, ________

5. Realicen lo que se indica.

a) Analicen las figuras que se presentan en la imagen y respondan cada pregunta.



- ¿Qué relación observan entre el valor de la base y el número de figura? ____________

____

- ¿Qué relación observan entre la base y la altura de cada figura de color azul? ____________

____

- Escriban los valores correspondientes a la figura 5. Base. ________ Altura. ________
- ¿Cuáles corresponden a la figura 9? Base. ________ Altura. ________
- Si x representa al número de figura de la sucesión, ¿cuál es la expresión que permite calcular la altura?

____

- Al considerar que x corresponde a la posición de la figura y que y a las unidades cuadráticas que conforman dicha figura, ¿cuál sería la expresión algebraica que relacione el número de figura con el número de piezas de color rosa?

____

- ¿Cuál sería la expresión algebraica que genera la sucesión, incluyendo las piezas de color rosa?

____

- En plenaria, y con la supervisión de su profesor, unifiquen la ecuación general cuadrática que permita calcular cualquier término de esta sucesión.

____

- Auxíliense de la expresión general que acaban de unificar y escriban cuántas piezas conforman a las siguientes figuras de la sucesión. Escriban dentro del cuadro sus procedimientos.

42. ________ 54. ________ 72. ________

- Auxiliados por su profesor, verifiquen que sus respuestas sean correctas.

b) Escriban la expresión general cuadrática que genera la siguiente sucesión: 6, 18, 38, 66, 102, …

c) Escriban los primeros cinco términos de la sucesión generada por la expresión algebraica $y = 3x^2 - 2$

______, ______, ______, ______, ______

6. Confronten con otros equipos sus respuestas y procedimientos. Orientados por su profesor, escriban las conclusiones sobre la manera de encontrar la expresión algebraica correspondiente a estas sucesiones cuadráticas.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

En esta lección se han estudiado las expresiones generales cuadráticas de la forma $y = x^2$, donde x representa a la posición que ocupa la figura y y corresponde a las piezas que conforman a dicha figura, por ejemplo, en la sucesión 1, 4, 9, 16,… los valores de x son 1, 2, 3, 4,… porque $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$.

$y = ax^2$, donde **a** corresponde al valor por el que se multiplica la base para obtener la altura, por ejemplo: en la sucesión 8, 32, 72, 128,… el valor de **a** es 8, entonces la expresión general cuadrática es $y = 8x^2$ porque $8(1^2) = 8$; $8(2^2) = 32$; $8(3^2) = 72$ y así sucesivamente.

$y = x^2 + b$, donde b representa el número de piezas adicionales a una base determinada, por ejemplo: en la sucesión 8, 11, 16, 23,… el valor de b es 7, por lo que la expresión algebraica es $y = x^2 + 7$,

porque $(1)^2 + 7 = 8$; $(2)^2 + 7 = 11$; $(3)^2 + 7 = 17$; $(4)^2 + 7 = 23$.

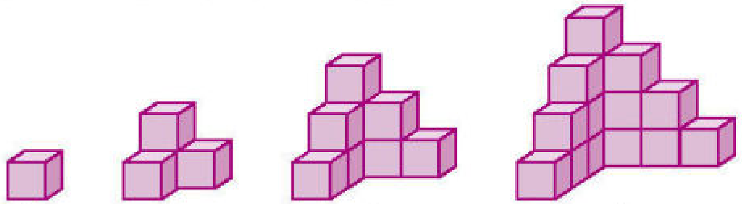
$y = ax^2 + b$, donde se combinan todas las expresiones anteriores.

Por ejemplo, en la sucesión 9, 24, 49, 84,… el valor de a es 5 y el de b es 4, por lo que se forma la expresión general cuadrática $y = 5x^2 + 4$, de manera que $5(1^2) + 4 = 9$, $5(2^2) + 4 = 24$; $5(3^2) + 4 = 49$, $5(4^2) + 4 = 84$.

Lo que aprendí

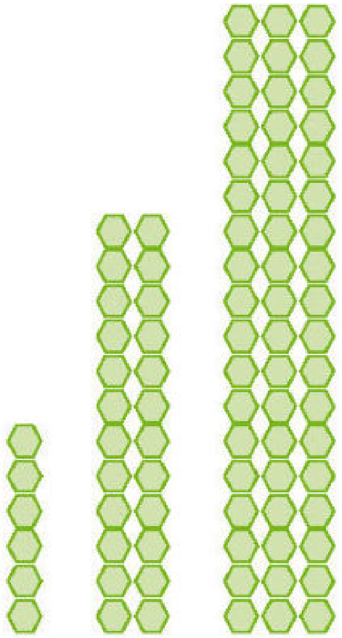
1. En el jardín de niños "El colibrí", los alumnos de segundo grado acomodaron unos cubos de la siguiente forma.

a) Analiza las figuras y responde las preguntas.



1 2 3 4

- ¿Cuántos cubos conformarán a la figura 5? ______
- ¿Cuál es la expresión que permite encontrar el enésimo término de la sucesión?



1 2 3

b) Analiza las figuras de la izquierda y responde.

- ¿Cuál es la expresión que permite encontrar cualquier término de la sucesión? ______
- ¿Cuántos hexágonos conformarán a la figura 98? ______
- Argumenta por qué la figura 149 forma o no parte de esta sucesión.

c) Escribe los primeros cinco términos de la sucesión representada por la siguiente expresión general cuadrática.

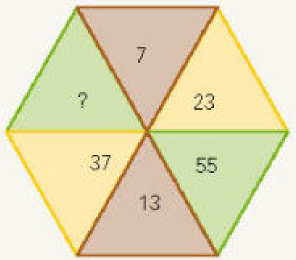
- $y = 7n^2 + 5$ ______, ______, ______, ______, ______
- ¿Cuál es el número que ocupa la posición 72?

2. Coordinados por su profesor reflexionen acerca de las respuestas y los procedimientos empleados para resolver las actividades de esta sección.

Desafío

1. Analiza la siguiente situación y contesta.

a) Cierta ocasión, Brenda observó un tablero como el que se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es el número que hace falta? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica con la que se puede encontrar el número que falta?
- Compara tus respuestas con las de otros compañeros y compartan sus procedimientos.

2. Coordinados por su profesor, confronten sus respuestas y, de manera grupal, acuerden la que sea correcta.

Enlázate

Para que puedas ampliar tus conocimientos acerca de las sucesiones cuadráticas, te invitamos a que consultes la siguiente página: http://mcj.arrakis.es/notas019.htm. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 15:42 horas.)

Comenta con tus compañeros las dudas que tenías sobre las sucesiones cuadráticas y la forma en que se han aclarado, así como los diferentes métodos que existen para resolver este tipo de sucesiones. En caso de que las dudas continúen, solicita el apoyo de tu profesor.

Horizonte cultural

Karl Friedrich Gauss (1977-1855), un matemático extraordinario.

Nacido en Alemania, desde niño destacó por sus habilidades matemáticas prodigiosas, al grado de ser conocido como "El príncipe de los matemáticos". Su linaje no fue nada aristocrático: nació en una miserable cabaña, sus padres eran pobres; no obstante, sus contribuciones a la matemática, la física matemática y otras ramas aplicadas de la ciencia, como la astronomía, fueron de una importancia sin igual.

Cuando tenía 10 años, su profesor mandó sumar los cien primeros números naturales. El maestro quería unos minutos de tranquilidad... pero transcurridos pocos segundos, Gauss levantó la mano y dijo tener la solución: "los cien primeros números naturales suman 5050".

Efectivamente, ¿pero cómo lo hizo tan rápido? Mentalmente se dio cuenta de que la suma del primer término con el último, la del segundo con el penúltimo, etcétera, era constante:

1, 2, 3, 4, 5 ...... 96, 97, 98, 99, 100

$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = 5 + 96 = \ldots = 101$

Con los 100 primeros números se pueden formar 50 pares, por lo que la respuesta correcta se obtiene con el producto: $(101)(50) = 5050$.

De esta manera, Gauss dedujo la fórmula que da la suma de ***n*** términos de una progresión aritmética de la que se conocen el primero y el último.

$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ donde a_1 es el primer término, a_n es el último y ***n*** es el número de términos de la progresión.

Su madre se puso a llorar cuando preguntó al matemático Wolfang Bolyai, amigo de Gauss, si llegaría a ser alguien y éste contestó: "¡El más grande de los matemáticos de Europa!".

Te invitamos a que investigues más acerca de la biografía y obra de este gran matemático.
http://platea.pntic.mec.es/~jdelucas/anecmate.htm.
http://edumate.wordpress.com/2008/02/03/anecdota-de-gauss/.
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 15:56 horas.)

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

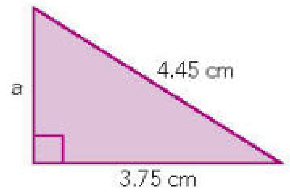
Lección 22: Sólidos de revolución

Lo que sabes

1. Basándote en el teorema de Pitágoras, calcula lo que se pide en cada figura. (Puedes auxiliarte de tu calculadora)

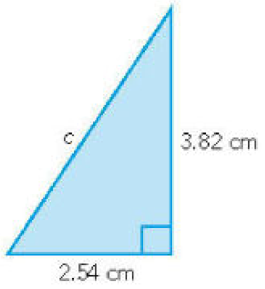
a) ¿Cuánto mide el cateto del siguiente triángulo rectángulo?

$a =$ ____________



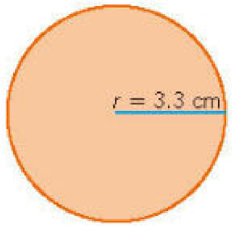
b) ¿Cuál es el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo rectángulo?

$c =$ ____________



c) Calculen el perímetro de la circunferencia.

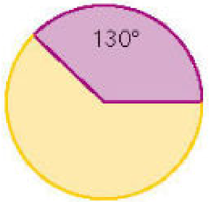
$P =$ ____________



d) ¿Cuál es la longitud del arco *AB* que cubre el sector amarillo?

____

e) ¿Cuál es el área del sector circular amarillo?



f) Reúnete con otro compañero, comparen sus respuestas y procedimientos, orientados por su profesor, reflexionen y lleguen a una conclusión.

Actividades

1. Preparen el siguiente material y realicen las actividades que se indican.

Material: Tres popotes o palos de madera, pegamento, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.

a) Utilicen como eje cada popote o palo de madera y péguenle respectivamente el triángulo rectángulo, el semicírculo y el rectángulo.

Anticipen.

- ¿Qué cuerpo geométrico se describirá al girar el triángulo rectángulo? ______
- ¿Y al girar el semicírculo? ______
- ¿Y al girar el rectángulo? ______

b) Realicen físicamente la actividad y confronten sus anticipaciones con lo que pueden observar.

¿Qué diferencias encuentran? ______

¿Qué similitudes? ______

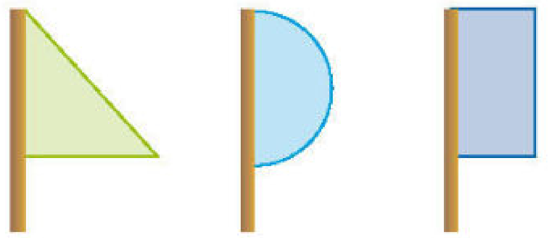


Figura 1 Figura 2 Figura 3

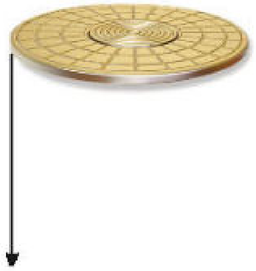
Glosario

Directriz. Es la línea, figura o superficie que determina las condiciones de generación de otra línea, figura o superficie.

c) Escriban en la tabla todas las características posibles de los cuerpos generados al realizar los giros.

Figura	Cuerpo generado	Características
1		
2		
3		

2. Una grúa dejó caer una coladera según la **directriz** mostrada en la imagen.



a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera con el movimiento de traslación de la coladera? ______

b) Realicen, en su cuaderno, la traslación del círculo representado por la coladera.

c) Compartan con el resto del grupo su estrategia para realizar la traslación del círculo.

d) Investiguen acerca de los sólidos de revolución y en una plenaria, organizados por su profesor, concluyan si los cuerpos generados en las actividades anteriores lo son. ______

Actividades

1. Realicen las siguientes actividades y contesten.

a) Consigan un tubo de cartón y realicen lo que se indica.

- Construyan las tapas de su tubo con las que se formaría un cilindro.
- Al recortar longitudinalmente el tubo, ¿qué forma tiene el cartón al aplanar dicho tubo? ______
- Con el tubo aplanado y las tapas que construyeron, representen el desarrollo plano de un cilindro.
- Escriban las siguientes medidas.

Altura del cilindro. ______

Radio del cilindro. ______

Perímetro de la base del cilindro. ______

b) En una hoja reciclada tracen el desarrollo plano de un cilindro cuyas medidas sean.

- Altura: 12 cm
- Radio: 3 cm

c) Recorten el desarrollo plano y armen el cilindro.

- Investiguen cuáles son los elementos de un cilindro e identifiquen con etiquetas los elementos del que formaron.

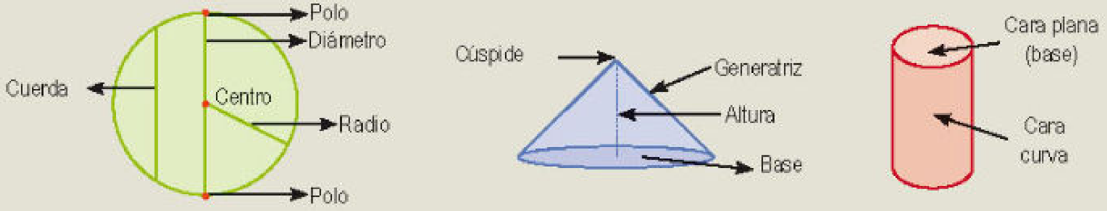
d) Comparen sus cilindros con los de otros equipos y en caso de ser diferentes, analicen las causas de ello.

Notas importantes

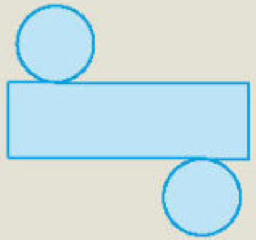
Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Se llaman sólidos de revolución los cuerpos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje llamado **eje de revolución**.

Por ejemplo, al girar sobre un eje al triángulo rectángulo se obtiene un cono. Al girar un semicírculo se obtiene una esfera, y al girar un rectángulo se obtiene un cilindro. Los elementos de estos sólidos son.

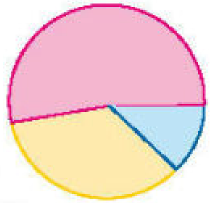


La cara curva de un cilindro es un rectángulo; uno de sus lados coincide con la altura y el otro con el perímetro de la base.



Actividades

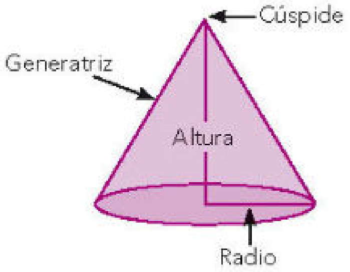
1. En una hoja de papel reciclado realicen lo que se indica para construir un cono.



a) Tracen una circunferencia de 8 cm de radio.

b) Tracen un ángulo central de 110°. (Representado en la imagen con el sector circular en rosa)

c) Utilicen un sector circular como pestaña. (Representado en la imagen con color azul)



d) Con el sector circular de 110° formen el cono correspondiente.

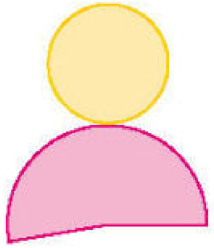
e) Tracen el círculo que sirva de tapa al cono.

f) Determinen. Altura del cono. ____________

Diámetro de la base del cono. ____________

g) Corten longitudinalmente el cono, desde la base hasta la **cúspide**, y extiéndanlo.

h) Peguen el desarrollo plano del cono sobre un pedazo de cartulina.



i) Escriban las medidas del cono que formaron.

- Radio de la base. ____________
- Altura del cono. ____________
- Generatriz. ____________
- Perímetro de la base. ____________
- Ángulo del sector circular que permite formar el cono. ____________

j) Comparen el cono que formaron con el de otro equipo y corroboren que las medidas sean correctas.

Glosario

Cúspide. Es la punta de una pirámide o cono.

2. Tracen el desarrollo plano que permita construir un cono cuya altura sea de 12 cm y el radio de la base sea de 5 cm.

a) Comparen su trazo con el de otros equipos y en caso de haber diferencias analicen las causas.

b) Compartan con el resto del grupo el procedimiento que siguieron para calcular la **generatriz** del cono.

c) Compartan su procedimiento para calcular la amplitud del arco de la circunferencia cuyo radio es de 12 cm.

d) Armen el cono y corroboren que cumple con las medidas indicadas.

e) Organizados por su profesor, en una plenaria propongan un procedimiento con el que se puedan construir conos con características específicas.

Glosario

Generatriz. Es la línea exterior de una superficie que al girar alrededor de un eje da lugar a un cuerpo de revolución como el cilindro o el cono.

3. Consigan un cono de los que se utilizan para tomar agua y escriban las medidas con las que fue construido.

a) Radio de la base. ____________

b) Diámetro de la base. ____________

c) Generatriz. ____________

d) Altura del cono. ____________

e) Ángulo central con el que se generó el cono. ____________

f) En una plenaria, organizados por su profesor, compartan sus respuestas y sus procedimientos y en caso de que existan diferencias, argumenten sobre ellas.

Notas importantes

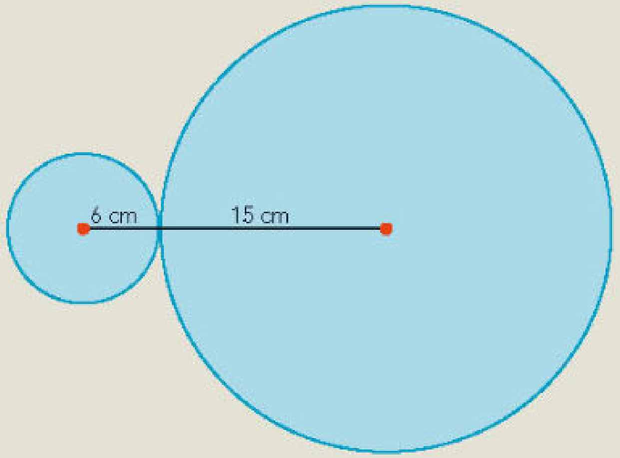
Considera la siguiente información para que aclares tus dudas.

Para construir un cono con características específicas, la proporcionalidad es una herramienta que puede ayudarnos. Por ejemplo: se sabe que la generatriz de un cono mide 15 cm y que el radio de la base es de 6 cm, ¿cuál es la amplitud del ángulo central que permite construir el cono?

Procedimiento:

a) Se traza un círculo de 6 cm de radio.

b) Se prolonga el radio de la base igual que la medida de la generatriz.



c) Se calcula el perímetro de la base. $P = \pi D$

$$P = \pi(12)$$

$$P \approx 37.70$$

d) Se calcula el perímetro de la circunferencia de radio igual a la generatriz.

$$P = \pi D$$

$$P = \pi(30)$$

$$P \approx 94.24$$

e) Si consideramos que 360° cubren 94.24 cm y necesitamos que el arco cubra 37.70 cm, se forma la proporción:

$$360° : 94.24 :: x° : 37.70$$

$$X = \frac{(360°)(37.70)}{94.24} = 144°$$

Entonces, la amplitud del arco de la circunferencia es de 144° aproximadamente.

En caso de que se desconozca el radio de la base del cono, la proporción que permite calcularlo es: $360° : 94.24 :: 144° : x$

$$X = \frac{(94.24)(144)}{360°} = 37.70$$

$$D = \frac{37.70}{\pi} = 12$$

$$r = \frac{12}{2} = 6$$

Lo que aprendí

1. En tu cuaderno realiza el desarrollo plano que se indica.
   a) Un cono de 3 cm de diámetro y 4 cm de generatriz.
   b) Un cono de 2 cm de radio y una altura de 5 cm.
   c) Calcula el área de los desarrollos planos que construiste.
      - Área del desarrollo plano del cono. ______
      - Área del desarrollo plano del cilindro. ______
   d) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, orientados por su profesor, reflexionen sobre los procedimientos empleados.

Desafío

1. Analiza la siguiente situación y realiza lo que se indica.
   a) Artemio observó en su casa los siguientes artículos.

Rodillo de una máquina

Tazón de cocina

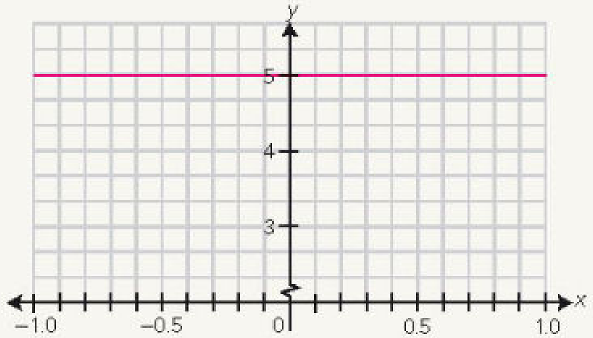
Pantalla de lámpara

   b) Argumenta cuál de las siguientes gráficas corresponde a cada artículo.

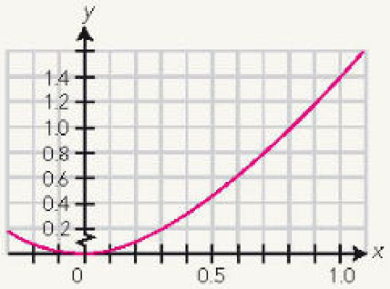
______

______

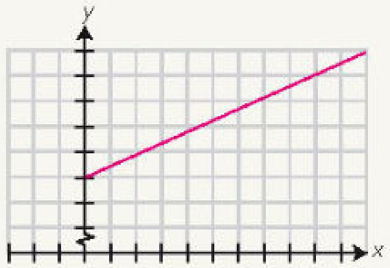
______



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

   c) Coordinados por su profesor, en una plenaria, confronta tus argumentos con el resto del grupo y reflexionen sobre ellos.

Enlázate

Para que amplíes tus conocimientos acerca de los sólidos de revolución te sugerimos visitar la página: http://www.estudiantes.info/matematicas/geometria/2-eso/cilindros,%20conos%20%20y%20esfera.htm. (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 16:04 horas.)

Investiga la definición de los elementos que conforman al cilindro, al cono y a la esfera. Haz clic en dibujos de cilindros, conos y esferas. Comenta con tus compañeros las características de estos sólidos y confróntalas con lo estudiado en esta lección.

Glosario

Hormigón. Piedra artificial constituida por la mezcla de cemento, agregados y agua.

Horizonte cultural

Los silos

El silo es una estructura necesaria en el ámbito de la agricultura, ya que permite el almacenamiento y el control permanente de la producción que todavía no sale a la venta. Así, lo cosechado en una temporada puede ser mantenido bajo protección hasta la próxima temporada en la cual se pondrá a la venta. Los silos resguardan los granos de los cambios climáticos y por eso es importante que tengan una ventilación apropiada pero que no entre luz ni agua al espacio.

Pueden tener diferente forma de acuerdo con las necesidades de cada lugar. El tipo más común de silo es aquel que tiene forma cilíndrica, cónica o una combinación de ambos y alcanza entre 10 y 30 metros de altura. Este tipo de silo se conoce como silo de torre. Usualmente están hechos de **hormigón**, aunque también pueden estar hechos de piedra o estar recubiertos por fuera con materiales especialmente pensados para evitar que el sol o la lluvia penetren al interior.

Actualmente se utilizan para almacenar otros materiales como cemento agua y hasta misiles.

Conos de Santa Mónica, Zacatecas.

Santa Mónica es una comunidad localizada en el municipio de Guadalupe, Zacatecas. Allí se encuentran localizados 22 silos construidos en 1835, con cantera y caliche para almacenar trigo, maíz y frijol, aunque también han servido como vivienda y como hotel, aunque no se puede entrar en ellos en la actualidad.

Para que amplíes tu horizonte cultural, te invitamos a que investigues acerca de los silos de búnker y los silos de bolsa, así como los materiales que se utilizan actualmente para su construcción.

http://www.definicionabc.com/general/silo.php
http://dle.rae.es/?id=XlsbOwr
http://www.imagenzac.com.mx/hemeroteca/gigantes-olvidados-03-29 (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 16:08 horas.)

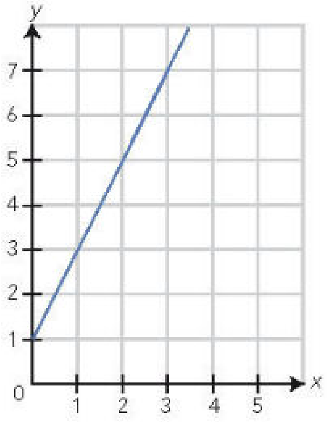
Eje temático	Forma espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Lección 23: Relación de la pendiente con el valor del ángulo formado con la abscisa y la razón cateto opuesto sobre cateto adyacente

Lo que sabes

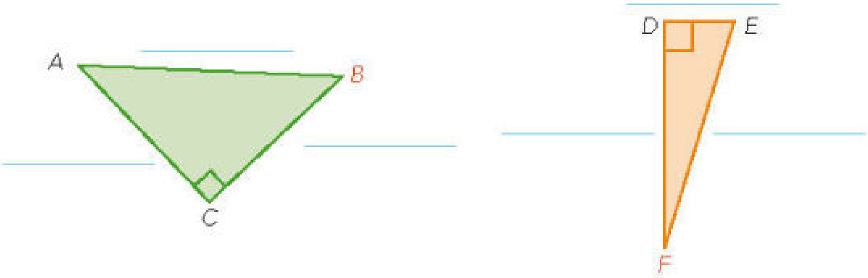
1. Basándote en las características de una relación funcional, analiza la siguiente gráfica y realiza lo que se indica.
   a) Completa la tabulación.

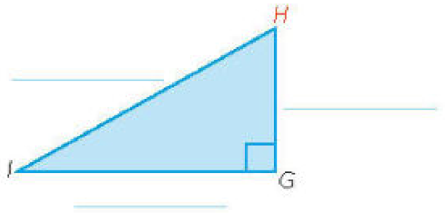
x	y
0	
1	
2	
3	
4	
5	



   b) ¿Qué tipo de función está representada?
   c) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta función?
   d) ¿Cuál es el valor de la pendiente en esta función?
   e) ¿Qué representa el valor de la pendiente de la función en la gráfica?
   f) ¿Cómo se puede identificar el valor de la pendiente cuando se conoce la función que determina la gráfica?

2. Tomando como base el teorema de Pitágoras, indica el nombre de los lados en los siguientes triángulos rectángulos y contesta lo que se te pide.





a) ¿Qué tipo de ángulos interiores tienen estos triángulos? ______

b) ¿Cómo se determina cuál es la hipotenusa? ______

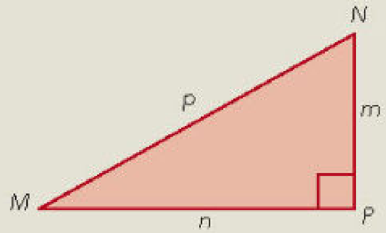
c) De acuerdo con la información anterior, coloca la letra que corresponde a cada lado en los triángulos y complementa el nombre de los catetos, según el ángulo agudo señalado en rojo.

3. Compara tus respuestas con las de algunos compañeros y argumenten sobre ellas en caso de tener diferencias.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus conocimientos.

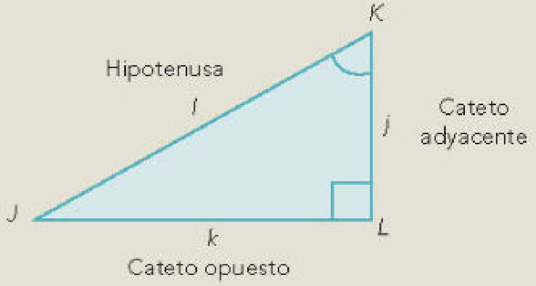
Los lados en un triángulo rectángulo también se indican con letras minúsculas que corresponden a la letra que señala el vértice opuesto. Observa el ejemplo.



O bien, si están indicados los lados se puede indicar la letra del vértice.

Además, en un triángulo rectángulo los catetos se pueden diferenciar asignándoles el nombre de **cateto opuesto** y **cateto adyacente**. Esto depende del ángulo agudo de referencia. Por ejemplo:

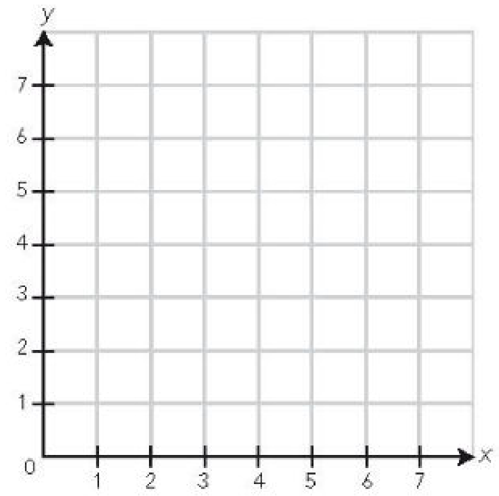
En el siguiente triángulo rectángulo se considera al ángulo K como referencia.



Actividades

1. Tracen con color rojo la gráfica que corresponde a la siguiente función y realicen lo que se indica.

a) $y = x$



b) ¿Cuál es el valor de la pendiente en esta función? ______

c) Tracen dos triángulos rectángulos considerando como hipotenusa la recta de la gráfica, catetos en el eje x y otro paralelo al eje y.

- ¿Cómo son los triángulos formados? ______

d) De acuerdo con lo anterior y considerando como ángulo de referencia al que se forma con la recta de la función y el eje x, ¿cuál es la medida de este ángulo para los triángulos? ______

- Remarquen con azul los catetos opuestos.

e) Considerando como unidad de medida la graduación del plano, ¿cuál es el resultado de dividir la medida del cateto opuesto entre el cateto adyacente en cada triángulo? ______

f) Comparen los trazos realizados y los cocientes obtenidos con los de otras parejas. Describan lo que observan considerando diferencias y/o semejanzas. ______

g) De manera grupal, comenten sobre el resultado del cociente que obtuvieron y reflexionen sobre la relación de éste con el valor de la pendiente en la función. Escriban una conclusión sobre ello.

Notas importantes

Considera la siguiente información para acrecentar tus conocimientos:

La razón tangente se define como el cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo en cuestión:

$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{CO}{CA} = \text{Tan } \theta$. El valor resultante corresponde a la pendiente de la recta o ángulo de inclinación (ángulo formado entre la recta y el eje x).

Para saber la amplitud del ángulo, se puede consultar la tabla de valores de las funciones trigonométricas.

Por ejemplo: en la tabla se muestra el valor aproximado de Tan 31° = 0.601, también se observa que 1.235 corresponde a la tangente de 51°.

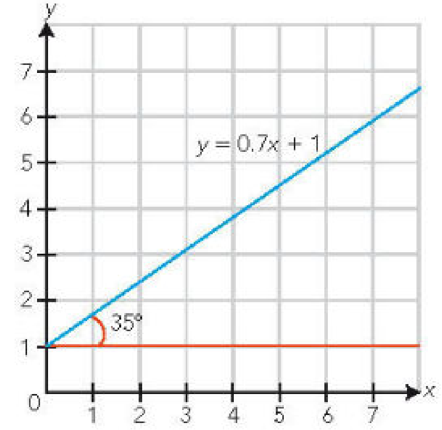
Es importante señalar que los valores numéricos que corresponden a la amplitud del ángulo son aproximados. Es por ello que en los cálculos generalmente se usan aproximaciones.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	1.000	0.000
1°	0.018	1.000	0.018
2°	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.996	0.088
6°	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.993	0.123
8°	0.139	0.990	0.141
9°	0.156	0.988	0.158
10°	0.174	0.985	0.176
11°	0.191	0.982	0.194
12°	0.208	0.978	0.213
13°	0.225	0.974	0.231
14°	0.242	0.970	0.249
15°	0.259	0.966	0.268
16°	0.276	0.961	0.287
17°	0.292	0.956	0.306
18°	0.309	0.951	0.325
19°	0.326	0.946	0.344
20°	0.342	0.940	0.364
21°	0.358	0.934	0.384
22°	0.375	0.927	0.404
23°	0.391	0.921	0.425
24°	0.407	0.914	0.445
25°	0.423	0.906	0.466
26°	0.438	0.899	0.488
27°	0.454	0.891	0.510
28°	0.470	0.883	0.532
29°	0.485	0.875	0.554
30°	0.500	0.866	0.577
31°	0.515	0.857	0.601
32°	0.530	0.848	0.625
33°	0.545	0.839	0.649
34°	0.559	0.829	0.675
35°	0.574	0.819	0.700
36°	0.588	0.809	0.727
37°	0.602	0.799	0.754
38°	0.616	0.788	0.781
39°	0.629	0.777	0.810
40°	0.643	0.766	0.839
41°	0.656	0.755	0.869
42°	0.669	0.743	0.900
43°	0.682	0.731	0.933
44°	0.695	0.719	0.966
45°	0.707	0.707	1.000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.719	0.695	1.036
47°	0.731	0.682	1.072
48°	0.743	0.669	1.111
49°	0.755	0.656	1.150
50°	0.766	0.643	1.192
51°	0.777	0.629	1.235
52°	0.788	0.616	1.280
53°	0.799	0.602	1.327
54°	0.809	0.588	1.376
55°	0.819	0.574	1.428
56°	0.829	0.559	1.483
57°	0.839	0.545	1.540
58°	0.848	0.530	1.600
59°	0.857	0.515	1.664
60°	0.866	0.500	1.732
61°	0.875	0.485	1.804
62°	0.883	0.470	1.881
63°	0.891	0.454	1.963
64°	0.899	0.438	2.050
65°	0.906	0.423	2.145
66°	0.914	0.407	2.246
67°	0.921	0.391	2.356
68°	0.927	0.375	2.475
69°	0.934	0.358	2.605
70°	0.940	0.342	2.747
71°	0.946	0.326	2.904
72°	0.951	0.309	3.078
73°	0.956	0.292	3.271
74°	0.961	0.276	3.487
75°	0.966	0.259	3.732
76°	0.970	0.242	4.011
77°	0.974	0.225	4.331
78°	0.978	0.208	4.705
79°	0.982	0.191	5.145
80°	0.985	0.174	5.671
81°	0.988	0.156	6.314
82°	0.990	0.139	7.115
83°	0.993	0.122	8.144
84°	0.995	0.105	9.514
85°	0.996	0.087	11.430
86°	0.998	0.070	14.300
87°	0.999	0.052	19.081
88°	0.999	0.035	28.640
89°	1.000	0.018	57.289
90°	1.000	0.000	Inf.

Actividades

1. De acuerdo con las gráficas que se presentan, y lo analizado sobre la razón tangente, realicen lo que se indica.
   a) Cada uno forme 2 triángulos rectángulos, trazando la paralela al eje y para completarlo y contesten las preguntas.

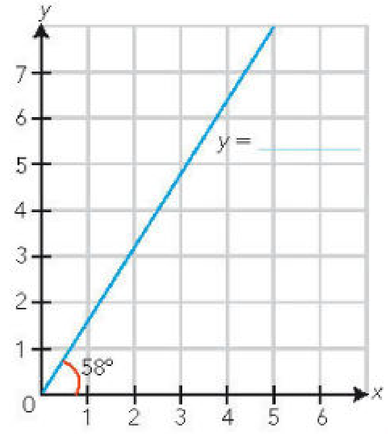


- Argumenten por qué la recta que corresponde al cateto adyacente se trazó paralela al eje x.
- Completen la tabla.

Triángulo	Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón (tangente)	Cociente	Pendiente
1	35°					
2	35°					

- ¿Cuántos triángulos distintos trazaron?
- ¿Cómo son los resultados de las dos últimas columnas?
- Corroboren si el cociente de la razón tangente corresponde al valor del ángulo indicado. Expliquen lo que sucede.
- Comenten al grupo sus respuestas y verifiquen si sucede o no lo mismo. Argumenten el porqué de las diferencias y semejanzas.

   b) Indiquen la expresión que corresponde a la siguiente gráfica.

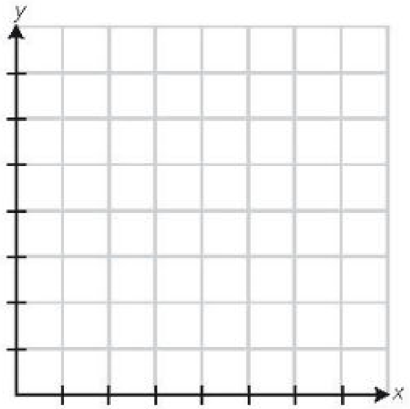


- Cada uno trace un triángulo rectángulo y obtenga el cociente de la razón tangente.
- Comparen sus trazos y medidas. Argumenten por qué es o no igual el resultado obtenido.

- Verifiquen si el valor de la pendiente corresponde a la amplitud del ángulo indicado. Describan la forma en que lo realizaron.

c) Tracen la gráfica que corresponde a la siguiente función y corroboren si el valor de la pendiente corresponde al cociente de la razón tangente.

$y = 1.6x + 2$

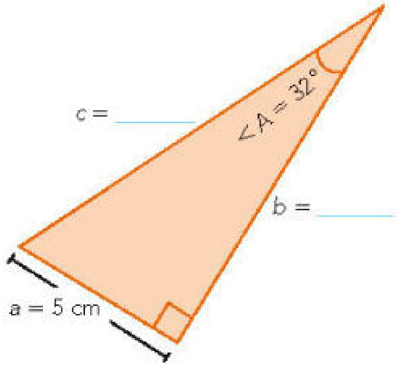


- Describan el procedimiento que realizaron.
- ¿Cuál es la amplitud del ángulo que se forma con la recta y la abscisa?
- ¿Cómo se expresa el cociente de la razón tangente para obtener el valor del ángulo?
- Argumenten por qué corresponde o no el ángulo anterior con la pendiente.
- Expongan al grupo sus respuestas y reflexionen sobre la relación del valor de la pendiente con el ángulo formado por la recta y el eje x o la paralela a él. Con la orientación de su profesor escriban una conclusión.

Actividades

1. De acuerdo con los siguientes triángulos rectángulos, la tabla de la página 188 y la razón tangente, realicen lo que se indica.

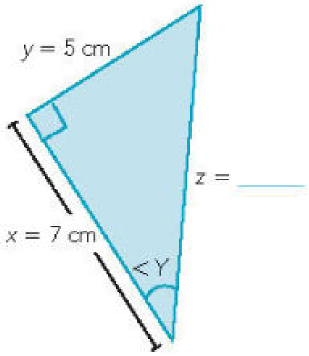
a) Consideren los valores indicados.



- ¿Con que letras están indicados los catetos?
- ¿Cuál es el cateto adyacente según el ángulo señalado?
- ¿Cuál es la razón tangente con la que se obtiene el ángulo de 32°?
- ¿Con qué letra se designa el valor que se desconoce en esta razón?
- Expliquen el procedimiento que se debe realizar para calcular el valor que falta.

- ¿Cuánto mide el lado c del triángulo?
- ¿Qué procedimiento siguieron para calcular esta medida?
- ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo del triángulo?
- ¿Cómo son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

b) Consideren los valores indicados.



- ¿Cuál es el cateto opuesto, según el ángulo señalado?
- ¿Cómo se expresa la razón tangente para el ángulo Y?
- Expliquen cómo se obtiene el valor del ángulo Y.
- ¿Cuánto mide el lado z?
- ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo?

2. Realicen lo que se pide.

a) Tracen, en su cuaderno, un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mida 8 cm y el otro 2 cm; calculen:

- La medida de la hipotenusa.
- La función que genera la hipotenusa.
- La medida de los ángulos agudos del triángulo.
- Expongan al grupo sus respuestas y reflexionen sobre el procedimiento para calcular los valores faltantes en un triángulo rectángulo. Con la orientación de su profesor escriban una conclusión.

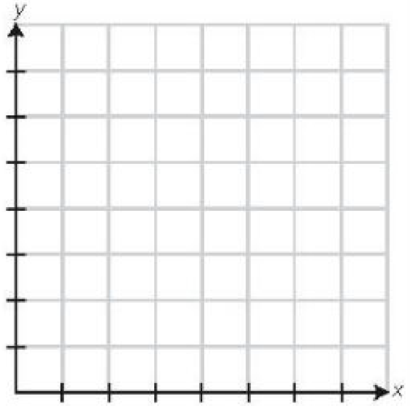
Lo que aprendí

1. Toma en cuenta la razón de tangente para trazar la gráfica que corresponde a la función $y = 2.6x + 1$. Al concluir, realiza lo siguiente.

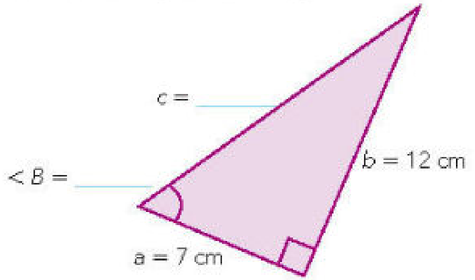
a) Forma un triángulo rectángulo.

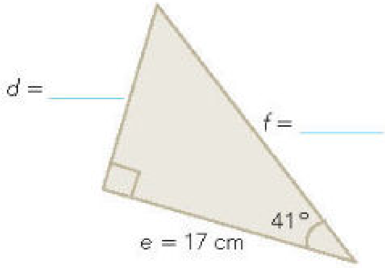
b) Argumenta si corresponde o no el valor de la pendiente con la tangente del ángulo formado con la abscisa.

c) ¿Cuál es la amplitud de los ángulos agudos del triángulo? Anótalos en la figura.

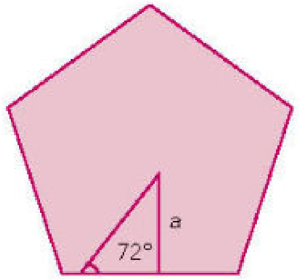


2. Calcula la amplitud del ángulo señalado y/o cateto con la razón de tangente, además, la medida de la hipotenusa en los siguientes triángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.





3. Un pentágono regular tiene un perímetro de 60 cm.



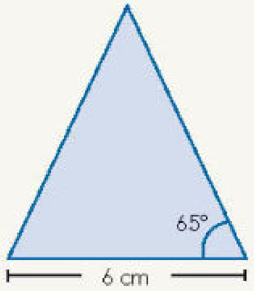
a) ¿Cuánto mide su apotema? __________

- ¿Cuál es el área de esta figura? __________
- ¿Cómo determinaste la apotema? __________

4. Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexiona sobre las diferencias que hayan encontrado. Por último, reflexionen sobre la utilidad que tiene este contenido en su vida cotidiana. Escriban su conclusión.

Desafío

1. Obtengan el área y la medida de los lados iguales del siguiente triangulo isósceles.

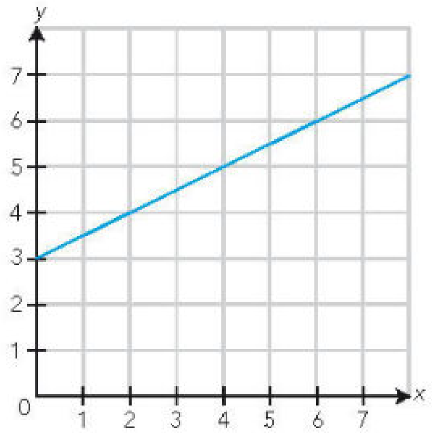


Eje temático	Forma espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Lección 24: Razón seno y coseno en un triángulo rectángulo

Lo que sabes

1. De acuerdo con lo visto en la lección anterior, analicen la gráfica y realicen lo que se indica.



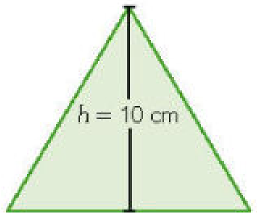
a) Completen un triángulo rectángulo con el segmento de la recta, trazando las paralelas correspondientes a los ejes.

b) Midan los catetos y obtengan el cociente para la razón tangente. __________

c) ¿Cuál es la amplitud del ángulo formado con la abscisa? __________

d) ¿Cuál es la expresión que modela la función representada en la gráfica? __________

2. Calculen el perímetro del siguiente triángulo equilátero. $P =$ __________



a) Describan el procedimiento que realizaron. __________

3. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Argumenten sobre sus procedimientos en caso de tener diferencias. Coordinados por su profesor, discutan sobre las aproximaciones que usaron.

Actividades

1. Analicen la figura y realicen lo que se indica. Consideren la escala como unidad de medida. Pueden usar su calculadora.

   a) ¿Cómo son los triángulos rectángulos formados con las líneas de colores? ____________________

   b) ¿Cuál es la amplitud del ángulo A? ____________________

   c) Escriban el procedimiento en su cuaderno.

   d) Escriban la medida de los catetos y la hipotenusa en cada uno de los triángulos formados con la líneas de color.

Triángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa	Cociente $\frac{CO}{HIP}$	Cociente $\frac{CA}{HIP}$
Azul					
Verde					
Rojo					
Morado					

   e) Considerando como referencia el ángulo *A*, expliquen de manera general cómo obtener la medida de:

   - El cateto opuesto. ____________________
   - El cateto adyacente. ____________________
   - Hipotenusa. ____________________

   f) ¿Cómo son los cocientes al dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa? ____________________

   g) ¿Cómo son los cocientes al dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa? ____________________

   h) Tomando en cuenta que las divisiones realizadas son razones originadas en un triángulo rectángulo, por lo tanto, llamadas razones trigonométricas, argumenten por qué son o no iguales los cocientes obtenidos. ____________________

   i) Consulten y corroboren si estos cocientes corresponden o no a la amplitud del ángulo *A*. Argumenten la situación. ____________________

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Argumenten en caso de haber diferencias. Comenten en plenaria y reflexionen sobre la forma de usar las razones trigonométricas. Con la orientación de su profesor lleguen a una conclusión y escríbanla. ____________________

Notas importantes

Consideren la siguiente información para acrecentar sus conocimientos.

La razón seno se define como el cociente del *cateto opuesto entre la hipotenusa* del ángulo en cuestión.

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotesnusa}} = \frac{CO}{HIP} = \text{Sen } \theta.$$

La razón coseno se define como el cociente del *cateto adyacente entre la hipotenusa* del ángulo en cuestión.

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotesnusa}} = \frac{CA}{HIP} = \text{Cos } \theta.$$

En la tabla se muestra que el valor aproximado al seno de 37° es 0.602.

También se muestra que el valor aproximado al coseno de 53° es 0.602.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	1.000	0.000
1°	0.018	1.000	0.018
2°	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.996	0.088
6°	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.993	0.123
8°	0.139	0.990	0.141
9°	0.156	0.988	0.158
10°	0.174	0.985	0.176
11°	0.191	0.982	0.194
12°	0.208	0.978	0.213
13°	0.225	0.974	0.231
14°	0.242	0.970	0.249
15°	0.259	0.966	0.268
16°	0.276	0.961	0.287
17°	0.292	0.956	0.306
18°	0.309	0.951	0.325
19°	0.326	0.946	0.344
20°	0.342	0.940	0.364
21°	0.358	0.934	0.384
22°	0.375	0.927	0.404
23°	0.391	0.921	0.425
24°	0.407	0.914	0.445
25°	0.423	0.906	0.466
26°	0.438	0.899	0.488
27°	0.454	0.891	0.510
28°	0.470	0.883	0.532
29°	0.485	0.875	0.554
30°	0.500	0.866	0.577
31°	0.515	0.857	0.601
32°	0.530	0.848	0.625
33°	0.545	0.839	0.649
34°	0.559	0.829	0.675
35°	0.574	0.819	0.700
36°	0.588	0.809	0.727
37°	0.602	0.799	0.754
38°	0.616	0.788	0.781
39°	0.629	0.777	0.810
40°	0.643	0.766	0.839
41°	0.656	0.755	0.869
42°	0.669	0.743	0.900
43°	0.682	0.731	0.933
44°	0.695	0.719	0.966
45°	0.707	0.707	1.000

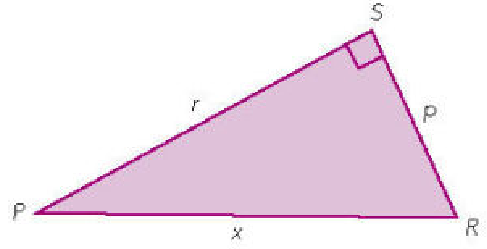
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.719	0.695	1.036
47°	0.731	0.682	1.072
48°	0.743	0.669	1.111
49°	0.755	0.656	1.150
50°	0.766	0.643	1.192
51°	0.777	0.629	1.235
52°	0.788	0.616	1.280
53°	0.799	0.602	1.327
54°	0.809	0.588	1.376
55°	0.819	0.574	1.428
56°	0.829	0.559	1.483
57°	0.839	0.545	1.540
58°	0.848	0.530	1.600
59°	0.857	0.515	1.664
60°	0.866	0.500	1.732
61°	0.875	0.485	1.804
62°	0.883	0.470	1.881
63°	0.891	0.454	1.963
64°	0.899	0.438	2.050
65°	0.906	0.423	2.145
66°	0.914	0.407	2.246
67°	0.921	0.391	2.356
68°	0.927	0.375	2.475
69°	0.934	0.358	2.605
70°	0.940	0.342	2.747
71°	0.946	0.326	2.904
72°	0.951	0.309	3.078
73°	0.956	0.292	3.271
74°	0.961	0.276	3.487
75°	0.966	0.259	3.732
76°	0.970	0.242	4.011
77°	0.974	0.225	4.331
78°	0.978	0.208	4.705
79°	0.982	0.191	5.145
80°	0.985	0.174	5.671
81°	0.988	0.156	6.314
82°	0.990	0.139	7.115
83°	0.993	0.122	8.144
84°	0.995	0.105	9.514
85°	0.996	0.087	11.430
86°	0.998	0.070	14.300
87°	0.999	0.052	19.081
88°	0.999	0.035	28.640
89°	1.000	0.018	57.289
90°	1.000	0.000	Inf.

Es importante señalar que los valores numéricos que corresponden a la amplitud del ángulo son aproximados. Es por ello que en los cálculos generalmente se usan aproximaciones.

Actividades

1. Analicen los siguientes planteamientos.

a) Tomando en cuenta la razón seno, coseno y las respectivas tablas, analicen las preguntas y escriban las razones trigonométricas para el siguiente triángulo, considerando la letra designada para cada lado y ángulo.



- ¿Cuál es la hipotenusa? ____
- Para el ángulo *R*, ¿cuál es el cateto adyacente? ____
- Argumenten si es también cateto adyacente para el ángulo *P*. ____
- Entonces, ¿cuál es el cateto opuesto para el ángulo *R*? ____
- ¿Por qué no cambia la hipotenusa si cambia el ángulo de referencia? ____
- Escriban las razones trigonométricas.

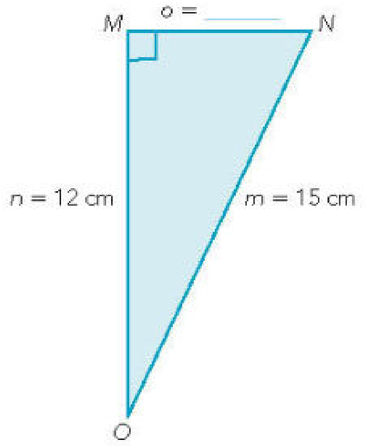
Sen *P* = ____ Sen *R* = ____

Cos *P* = ____ Cos *R* = ____

Tan *P* = ____ Tan *R* = ____

- ¿Qué diferencias y/o semejanzas observan en las razones trigonométricas? ____

b) De acuerdo con el siguiente triángulo.



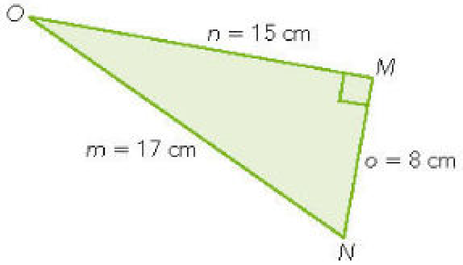
- ¿Cuál es la medida del lado *o*? ____
- ¿Cuál es el resultado de sumar la amplitud de los ángulos *N* y *O*? ____
- Argumenten su respuesta. ____
- ¿Qué nombre recibe este tipo de ángulos? ____

- Realicen las razones trigonométricas de acuerdo con los ángulos agudos del triángulo anterior. Completen la tabla.

Ángulo	Sen = $\frac{CO}{HIP}$	Cociente	Cos = $\frac{CA}{HIP}$	Cociente	Tan = $\frac{CO}{CA}$	Cociente
N					$\frac{n}{o} = \frac{12}{\ }$	
O			$\frac{n}{m} = \frac{12}{15}$	0.8		

- ¿Cuál es la amplitud del ángulo *N*? ____
- ¿Y del ángulo *O*? ____
- ¿Con cuál razón es igual el seno del ángulo *O*? ____
- Argumenten por qué sucede esto y escriban en qué otro caso hay igualdad. ____
- Multipliquen la razón tangente de *N* por la razón tangente de *O*. ¿Qué resultado obtuvieron? ____
- Expliquen por qué se obtiene este resultado y cómo se le llama a esta propiedad. ____
- Con apoyo de su profesor expongan al grupo sus resultados y reflexionen sobre.
- La igualdad de las razones trigonométricas seno y coseno de los ángulos complementarios.
- El resultado que se obtiene al multiplicar las tangentes de ángulos complementarios.
- Elaboren una conclusión para cada situación. Escríbanlas. ____

c) Corroboren sus conclusiones respecto a los ángulos complementarios de un triángulo.



- Escriban las igualdades que se originan con los ángulos *N* y *O*.

Sen *O* = ____ =

Sen *N* = ____ =

Cos *O* = ____ =

Cos *N* = ____ =

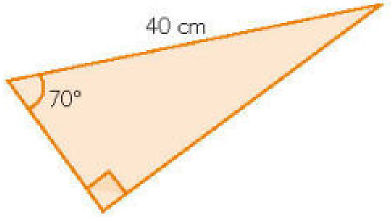
- Escribe la razón tangente para los ángulos complementarios y multiplíquenlos para verificar su conclusión. ____

d) Comenten con otro equipo sus respuestas y, orientados por su profesor, corrobórenlas y escríbanlas.

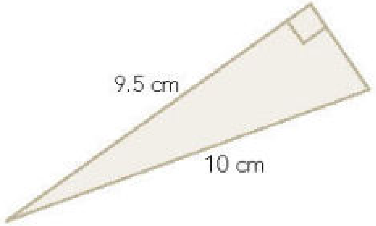
Actividades

1. Resuelvan los siguientes problemas utilizando las razones trigonométricas seno o coseno. Valoren el uso del teorema de Pitágoras como recurso auxiliar en la solución. Escriban en el recuadro el procedimiento utilizado en cada caso. Consideren el uso de la calculadora como apoyo en los procedimientos realizados.

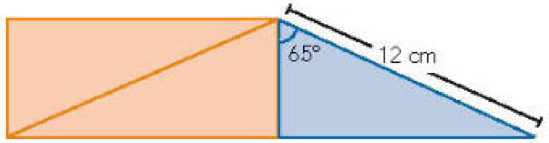
a) ¿Cuánto miden los catetos de este triángulo?



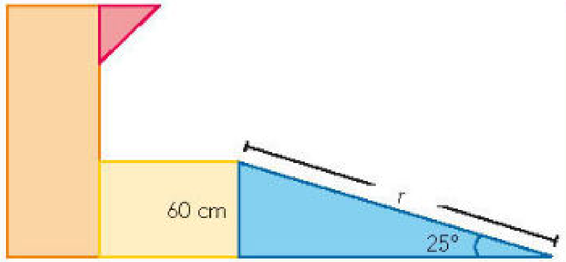
b) En el siguiente triángulo, ¿cuál es la amplitud de sus ángulos agudos?



c) Calculen el área del rectángulo considerando que su diagonal tiene una longitud de 20 cm.



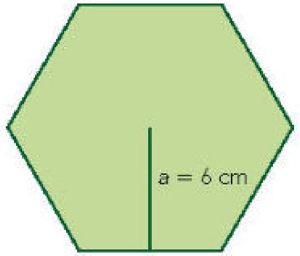
d) La imagen representa la rampa de un acceso para discapacitados. ¿Cuál es la longitud de la rampa?



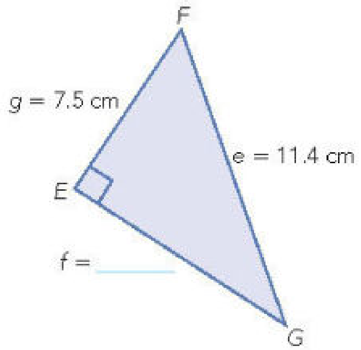
Lo que aprendí

1. Considerando las funciones trigonométricas y las siguientes imagenes, realiza lo que se indica.

a) Calcula el perímetro del siguiente hexágono regular.



b) Calcula la medida del lado que falta y escríbela en la figura.



- Formula las razones trigonométricas para los ángulos agudos.

Sen *F* = ______ Sen *G* = ______

Cos *F* = ______ Cos *G* = ______

Tan *F* = ______ Tan *G* = ______

- ¿Con cuál razón es igual el seno de *F*?

______

- ¿Con cuál razón es igual el coseno de *F*?

______

- ¿Qué resultado se obtiene de multiplicar la razón tangente del ángulo *F* por la tangente del ángulo *G*?

______

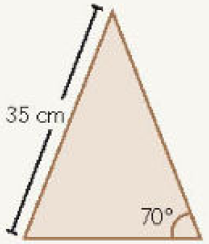
- ¿Cuál es la amplitud de los ángulos?

$< F =$ ______ $< G =$ ______

- Comenta con tus compañeros, argumenta tus respuestas y corrige, de ser necesario.

Desafío

1. Obtén el área del siguiente triángulo. Escribe el procedimiento en el recuadro.



Enlázate

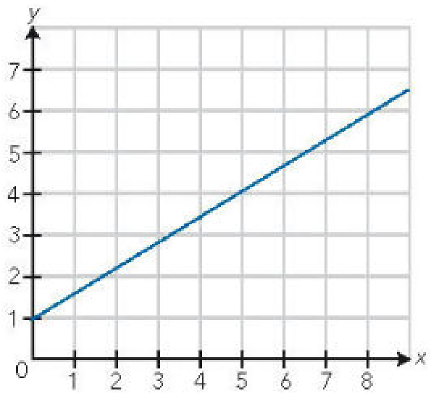
Ingresa a la página http://www.thatquiz.org/es/. (Consulta: 8 de abril de 2012 a las 15:25 horas.) En la columna de "geometría" encontrarás "triángulos". Esta ventana te propone la práctica de distintas situaciones. Marca con una palomita "30-60-90" y contesta los ejercicio propuestos.

Eje temático	Forma espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Lección 25: Uso de las razones trigonométricas

Lo que sabes

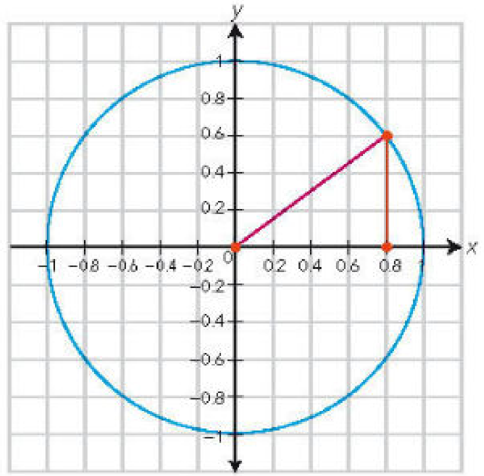
1. Forma el triángulo rectángulo en la siguiente gráfica trazando la paralela al eje *x* y al eje *y*. Obtén las medidas que faltan en los lados y la amplitud de los ángulos agudos.
   a) Considera el ángulo formado con la paralela a *x* y la recta en el punto (0,1), de manera que su cateto adyacente mida 7.



- Según la escala indicada, ¿cuál es la longitud del cateto opuesto? ________
- ¿Cuál es la amplitud de los ángulos agudos? ________
- ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa? ________
- Compara tus respuestas con la de otros compañeros. Verifiquen si usaron o no el mismo procedimiento. Argumenten sobre las diferencias y/o semejanzas que hayan tenido.

Actividades

1. Analicen la siguiente imagen contesten lo que se indica.



a) ¿Cuál es el segmento que indica el radio del círculo? ________

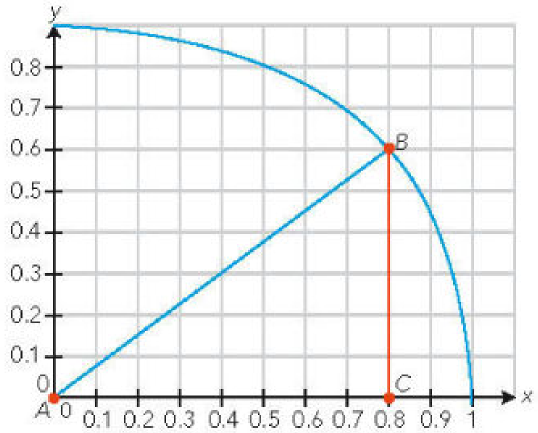
b) ¿Cuánto mide? ________

c) Argumenten por qué se le puede llamar círculo unitario. ________

d) Comenten con otros equipos sus respuestas y ya en grupo, con la orientación de su profesor, lleguen a una conclusión sobre lo que es el círculo unitario. Escríbanla. ________

Actividades

1. En la siguiente imagen se presenta una parte del círculo anterior. Para que obtengas los resultados correctos traza una gráfica como la de este ejemplo en tu cuaderno. Debe ser de 10 × 10 cm.



a) En el triángulo formado por la paralela a *y*, el radio y el eje *x*, ¿cuál es la hipotenusa? ________

- Asignen la letra minúscula que corresponda a cada lado del triángulo. Escríbanla sobre la figura.

b) Considerando el ángulo *A*, escriban la razón seno, con las letras que le correspondan y sustituyendo por su longitud para obtener el cociente.

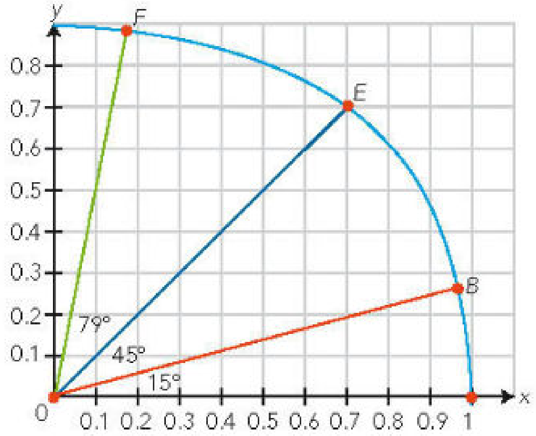
Sen *A* = ____ = ____ = ____

- Argumenten por qué es igual o no el cociente obtenido a la longitud del cateto opuesto. ________
- Realicen el mismo procedimiento para la razón coseno del ángulo *A*.

Sen *A* = ____ = ____ = ____

- Argumenten por qué es igual o no el cociente obtenido a la longitud del cateto adyacente. ________
- Con el apoyo de su profesor, comenten y reflexionen sobre las respuestas anteriores. Lleguen a conclusiones y escríbanlas. ________

2. Verifiquen sus conclusiones formando los triángulos que correspondan a cada ángulo en la siguiente imagen. Tracen con distinto color cada triángulo y planteen las razones con las longitudes, según la escala marcada.



Sen 15° = ____ = ____

Cos 15° = ____ = ____

Sen 45° = ____ = ____

Cos 45° = ____ = ____

Sen 79° = ____ = ____

Cos 79° = ____ = ____

Notas importantes

Consideren la siguiente información para complementar sus ideas y valoren su uso en la solución de los ejercicios.

Si en el triángulo *ABC* se tienen las siguientes longitudes.

Sen $A = \frac{4}{8} = 0.5$, esto corresponde a 30°.

Tan $A = \frac{4}{6.92} = 0.578$ (valor truncado) corresponde a una amplitud aproximada de 30°.

Cos $B = \frac{4}{c}$ Cos $60° = \frac{4}{c}$

Entonces:

$c = \frac{4}{\text{Cos } 60°} = \frac{4}{0.5} = 8$ (se cambia Cos 60° por su valor numérico, según las tablas o la calculadora).

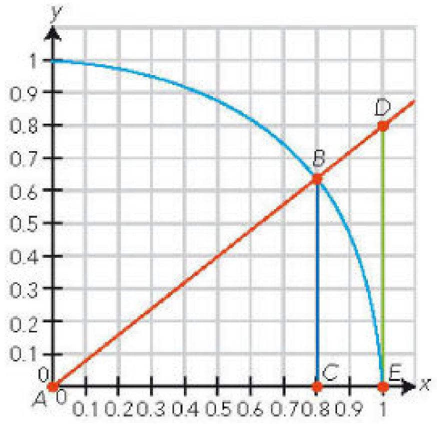
Además, recuerden que las aproximaciones dependen de los decimales que se utilicen.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	1.000	0.000
1°	0.018	1.000	0.018
2°	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.996	0.088
6°	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.993	0.123
8°	0.139	0.990	0.141
9°	0.156	0.988	0.158
10°	0.174	0.985	0.176
11°	0.191	0.982	0.194
12°	0.208	0.978	0.213
13°	0.225	0.974	0.231
14°	0.242	0.970	0.249
15°	0.259	0.966	0.268
16°	0.276	0.961	0.287
17°	0.292	0.956	0.306
18°	0.309	0.951	0.325
19°	0.326	0.946	0.344
20°	0.342	0.940	0.364
21°	0.358	0.934	0.384
22°	0.375	0.927	0.404
23°	0.391	0.921	0.425
24°	0.407	0.914	0.445
25°	0.423	0.906	0.466
26°	0.438	0.899	0.488
27°	0.454	0.891	0.510
28°	0.470	0.883	0.532
29°	0.485	0.875	0.554
30°	0.500	0.866	0.577
31°	0.515	0.857	0.601
32°	0.530	0.848	0.625
33°	0.545	0.839	0.649
34°	0.559	0.829	0.675
35°	0.574	0.819	0.700
36°	0.588	0.809	0.727
37°	0.602	0.799	0.754
38°	0.616	0.788	0.781
39°	0.629	0.777	0.810
40°	0.643	0.766	0.839
41°	0.656	0.755	0.869
42°	0.669	0.743	0.900
43°	0.682	0.731	0.933
44°	0.695	0.719	0.966
45°	0.707	0.707	1.000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.719	0.695	1.036
47°	0.731	0.682	1.072
48°	0.743	0.669	1.111
49°	0.755	0.656	1.150
50°	0.766	0.643	1.192
51°	0.777	0.629	1.235
52°	0.788	0.616	1.280
53°	0.799	0.602	1.327
54°	0.809	0.588	1.376
55°	0.819	0.574	1.428
56°	0.829	0.559	1.483
57°	0.839	0.545	1.540
58°	0.848	0.530	1.600
59°	0.857	0.515	1.664
60°	0.866	0.500	1.732
61°	0.875	0.485	1.804
62°	0.883	0.470	1.881
63°	0.891	0.454	1.963
64°	0.899	0.438	2.050
65°	0.906	0.423	2.145
66°	0.914	0.407	2.246
67°	0.921	0.391	2.356
68°	0.927	0.375	2.475
69°	0.934	0.358	2.605
70°	0.940	0.342	2.747
71°	0.946	0.326	2.904
72°	0.951	0.309	3.078
73°	0.956	0.292	3.271
74°	0.961	0.276	3.487
75°	0.966	0.259	3.732
76°	0.970	0.242	4.011
77°	0.974	0.225	4.331
78°	0.978	0.208	4.705
79°	0.982	0.191	5.145
80°	0.985	0.174	5.671
81°	0.988	0.156	6.314
82°	0.990	0.139	7.115
83°	0.993	0.122	8.144
84°	0.995	0.105	9.514
85°	0.996	0.087	11.430
86°	0.998	0.070	14.300
87°	0.999	0.052	19.081
88°	0.999	0.035	28.640
89°	1.000	0.018	57.289
90°	1.000	0.000	Inf.

Actividades

1. Para analizar la razón tangente en el círculo unitario, será necesario utilizar trazos auxiliares.



a) Si el segmento *DE* es paralelo a *BC*, argumenta porque el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *ADE*.

b) Entonces indica si la proporción $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$ es o no correcta. __________

c) ¿Cuál es la medida del segmento *AE*? __________

d) De acuerdo con esta longitud, argumenta por qué $\frac{BC}{AC} = DE$ __________

e) Usando la notación de segmentos, ¿cómo se define la razón tangente para el ángulo *A* en el triángulo *ABC*?

Tan *A* = __________

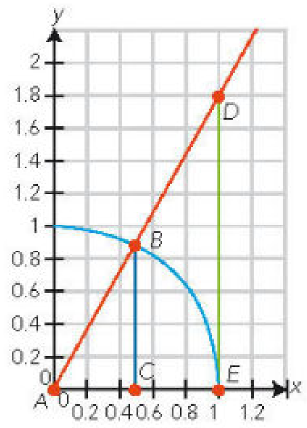
f) Sustituye las longitudes y obtengan el cociente. ¿Cuál es el resultado? __________

g) Ahora argumenta por qué la razón tangente del < *A* es igual a la longitud *DE*. __________

h) Expón tus respuestas al grupo. Entre todos elaboren una conclusión al respecto; reúnete en grupo y elaboren una conclusión y expónganla.

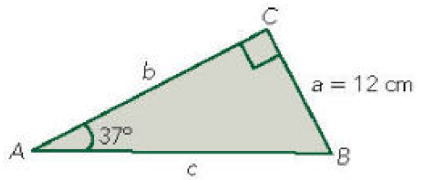
i) Corroboren su conclusión de acuerdo con la siguiente imagen.

- Para el triángulo *ABC*: Tan *A* = __________ = __________
- Longitud *DE*: __________



2. Usando las funciones trigonométricas, calculen las medidas que faltan en los siguientes triángulos. Pueden usar calculadora científica o tablas de valores. Consideren también el uso del teorema de Pitágoras.

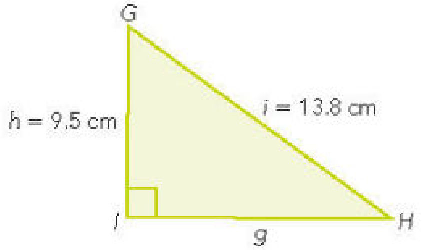
   a) Se conoce la longitud de un lado y la amplitud de un ángulo.



$< B =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

- Discutan sobre el procedimiento que consideren más adecuado para obtener los valores indicados y escríbanlo. ____________________

   b) Se conoce la longitud de dos lados.



$< G =$ ______ $< H =$ ______ $g =$ ______

- Discutan sobre el procedimiento que consideren más adecuado para obtener los valores indicados y escríbanlo. ____________________

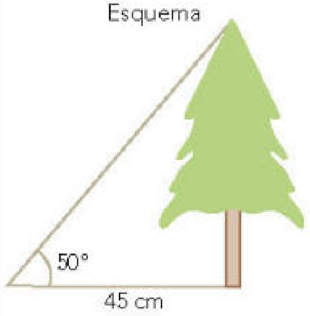
   c) Comparen sus resultados con los de otras parejas, argumenten sobre sus diferencias y/o semejanzas. Reflexionen sobre los procedimientos que consideren más adecuados, según el planteamiento que se proponga.

Actividades

1. Analicen los siguientes problemas y resuélvanlos utilizando las razones trigonométricas necesarias y/o el teorema de Pitágoras, en los casos que consideren convenientes. Dibujen, en el recuadro, los esquemas que representen cada situación (guíense con el ejemplo del problema a) y escriban el procedimiento de solución.

   a) Un pino a cierta hora del día proyecta una sombra de 45 m. Si el **ángulo de elevación** de la sombra es de 50°, ¿cuál será la altura del pino?

Esquema | Procedimiento de solución



Glosario

Ángulo de elevación. El que se forma con la horizontal del observador y el lugar observado, que está situado arriba del observador.

   b) Un poste se sostiene con un cable sujeto en la parte superior y en el piso a 12 m de la base. Si su ángulo de elevación es de 70°, ¿cuál es la medida del poste y del cable que lo sostiene?

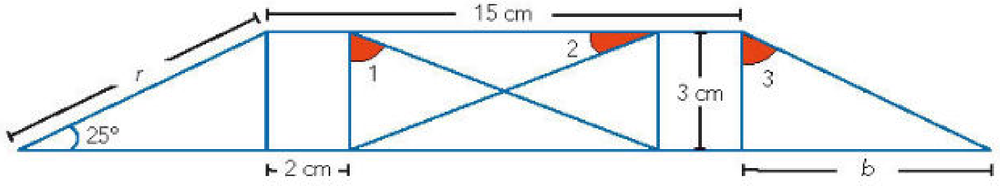
   c) Un hexágono tiene 36 cm de perímetro. ¿Cuánto tiene de área?

2. Comparen sus esquemas y procedimientos de solución. Argumenten sobre sus diferencias y/o semejanzas. Corrijan en caso de ser necesario.

Lo que aprendí

1. Toma en cuenta las razones trigonométricas para analizar y resolver los siguientes problemas.

   a) Una rampa para una competencia de patinetas tiene una estructura básica como la siguiente.



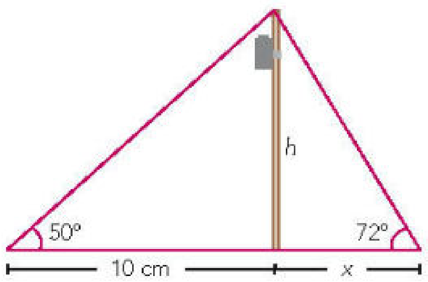
De acuerdo con la imagen, calcula la amplitud de los ángulos.

- $<1 =$ ______
- $<2 =$ ______
- $<3 =$ ______

y la longitud de:

- $r =$ ______
- $b =$ ______

2. El poste de una antena de televisión se detiene con dos cables. ¿Cuánto tiene de altura la antena? ¿Cuál es la longitud de la base de la antena hasta el amarre más cercano?

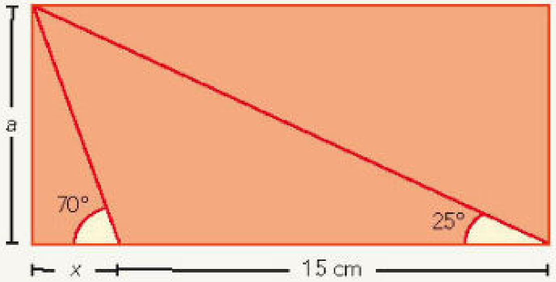


Procedimiento de solución

3. Compara tus resultados y procedimientos con los de otros compañeros. Argumenten sobre ellos y corrijan de ser necesario.

Desafío

1. De acuerdo con la siguiente imagen, calcula la medida del lado a.



2. Expongan su respuesta y, con apoyo del profesor, discutan sobre la forma en que se le puede dar solución al problema.

Enlázate

Para que amplíes tus conocimientos de trigonometría, consulta la siguiente página y practica con los ejercicios propuestos. Explora en las distintas lecciones y, con apoyo de tu profesor, plantea al grupo uno de los problemas que te hayan parecido más interesante. http://www.aulafacil.com/matematicas-trigonometria-plana/curso/Temario.htm.

(Consulta: 10 de enero de 2013 a las 21:44 horas.)

Horizonte cultural

Investiga sobre la historia de la trigonometría y comparte la información con tus compañeros.

Con apoyo de su profesor, elaboren un tríptico en el cual desarrollen y expliquen la información recabada. Intercámbienlo con sus compañeros.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

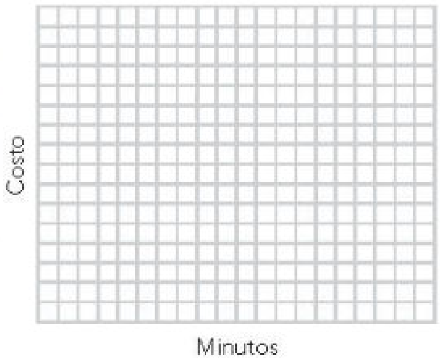
Lección 26: Razón de cambio y pendiente de una recta

Lo que sabes

1. La matemática tiene importantísimas aplicaciones en muchos ámbitos de la vida cotidiana, uno de ellos es la telefonía celular. Analiza la imagen y contesta.

a) ¿Cuánto debe pagar Andrés por 1, 2, 5, 7 y 9 minutos respectivamente? Completa la tabla y construye la gráfica correspondiente.

Minutos	Costo
1	
2	
5	
7	
10	

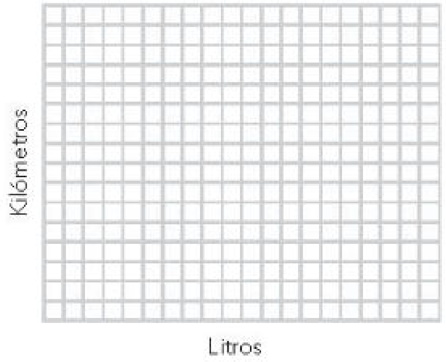


- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? ___

b) El rendimiento de gasolina, es decir, la cantidad de kilómetros que puede recorrer un auto con un litro de gasolina, está representado como: $y = 7x$

Donde x representa la cantidad de litros de gasolina y y los kilómetros que recorre. Completa la siguiente tabla utiliza el plano para realizar la gráfica que corresponde a este fenómeno.

Gasolina (l)	Recorrido (km)
1	
2	
5	
7	
10	



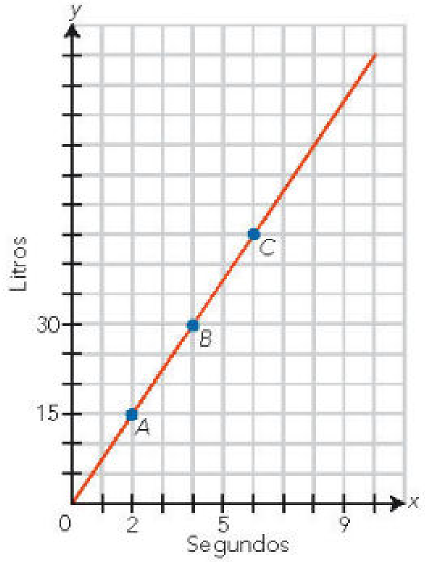
- ¿Cuántos kilómetros se podrán recorrer con 78 ℓ de gasolina?

___

Actividades

1. De acuerdo con las gráficas que se presentan, realicen lo que se indica.

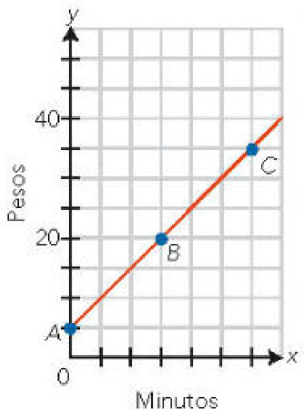
   a) La siguiente gráfica corresponde al llenado de un tinaco. Analícenla y contesten las preguntas.



- ¿Cuáles son las coordenadas del punto *A*?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B*?
- ¿Cuál es la diferencia de las abscisas de estos dos puntos?
- ¿Cuál es la diferencia de las ordenadas de estos dos puntos?
- ¿Cuál es la razón de cambio entre los puntos *A* y *B*, es decir, el cociente de dividir la diferencia de las ordenadas entre el de las abscisas?
- Comparen sus respuestas y reflexionen sobre cómo se determina la razón de cambio entre dos puntos de una recta. Escriban su conclusión.

   b) La siguiente gráfica corresponde a la relación minutos-costo. Analícenla, completen la tabla y contesten las preguntas.

Puntos	x	y



- ¿Cuál es la razón de cambio de los puntos *A* y *B*?
- ¿Cuál es la razón de cambio de los puntos *A* y *C*?
- ¿Cuál es la razón de cambio de los puntos *C* y *B*?
- ¿Qué diferencia hay entre las tres razones obtenidas?

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y revisen que sean correctas. Posteriormente contesten las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántos puntos se necesitan para calcular la razón de cambio?

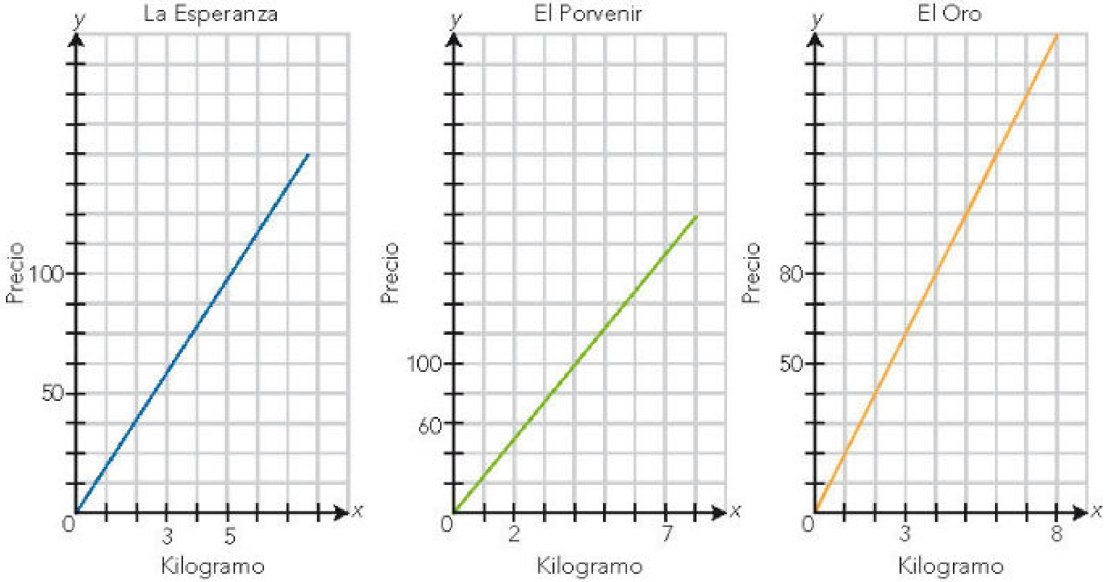
   b) Si de una misma recta se toman dos pares de puntos diferentes y se determina la razón de cambio de cada par, ¿cuál es la diferencia que habrá entre estas razones de cambio?

   c) ¿Cuál es la función (expresión algebraica) que modela esta situación?

   d) ¿Qué relación encuentran entre la función y la razón de cambio?

   e) Comparen sus respuestas, reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado y, junto con su profesor, escriban una conclusión sobre la relación que existe entre la razón de cambio de los puntos de una recta y la función que representa dicha recta.

3. Las siguientes gráficas corresponden a la relación kilogramo-precio de un mismo producto en tres tiendas diferentes. Analícenlas y contesten las preguntas.



   a) ¿Cuál es la razón de cambio en cada una de las gráficas anteriores?
   - La Esperanza.
   - El Porvenir.
   - El Oro.

   b) ¿Cuáles son las rectas que tienen la misma razón de cambio?

   c) ¿Cuál es la función que modela cada una de las rectas?
   - La Esperanza.
   - El Porvenir.
   - El Oro.

   d) ¿Cuál de las rectas está más inclinada?

   e) Argumenten si la inclinación de la recta determina la razón de cambio.

4. Comparen sus respuestas y, junto con su profesor, concluyan sobre la importancia que tiene la graduación de los ejes para determinar y calcular la razón de cambio de una función lineal. Escriban su conclusión.

Notas importantes

Lee la siguiente información para complementar tus ideas.

La razón de cambio entre los puntos de una función lineal se calcula dividiendo la diferencia de las ordenadas entre la de las abscisas, es decir:

$$r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde:

y_1 es la ordenada del primer punto

y_2 es la ordenada del segundo punto

x_1 es la abscisa del primer punto

x_2 es la abscisa del segundo punto

La razón de cambio es la misma para cualquier par de puntos de una misma recta.

Por ejemplo, se quiere calcular la razón de cambio entre los puntos $A(4, 18)$, $B(7, 31.5)$ y $C(14, 63)$, que corresponden a la misma recta.

A y *B*	*B* y *C*	*C* y *A*
$r = \frac{31.5 - 18}{7 - 4}$	$r = \frac{63 - 18}{14 - 4}$	$r = \frac{63 - 31.5}{14 - 7}$
$r = \frac{13.5}{3} = 4.5$	$r = \frac{45}{10} = 4.5$	$r = \frac{31.5}{7} = 4.5$

Además, los puntos que se utilicen para calcular la razón de cambio son conmutables, es decir, no importa el orden en que se tomen, la razón es la misma. De acuerdo con los puntos anteriores.

A y *B*	*B* y *A*
$r = \frac{31.5 - 18}{7 - 4}$	$r = \frac{18 - 31.5}{4 - 7}$
$r = \frac{13.5}{3} = 4.5$	$r = \frac{-13.5}{-3} = 4.5$

La razón de cambio y el coeficiente de la x de la función que modela la recta son el mismo número. La función que modela la recta de los puntos de nuestro ejemplo es:

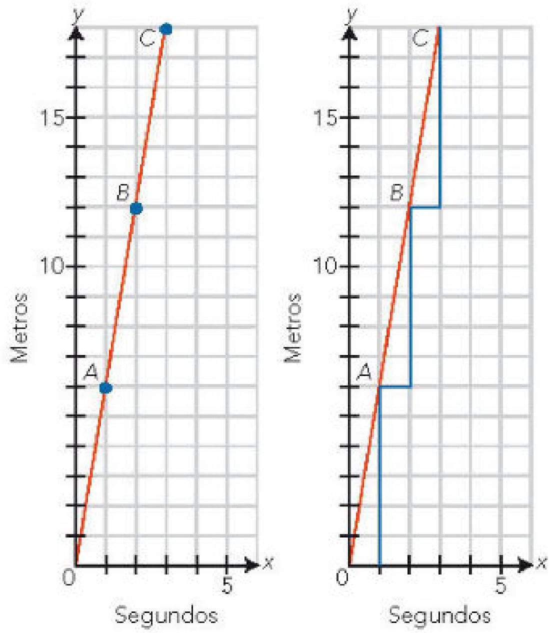
$$y = 4.5x$$

La razón de cambio es 4.5

Actividades

1. Analicen y resuelvan los siguientes problemas.

a) Andrés recorre 6 metros cada segundo y conserva la velocidad de su recorrido en todo momento. La siguiente gráfica corresponde a su recorrido durante los primeros cinco segundos.



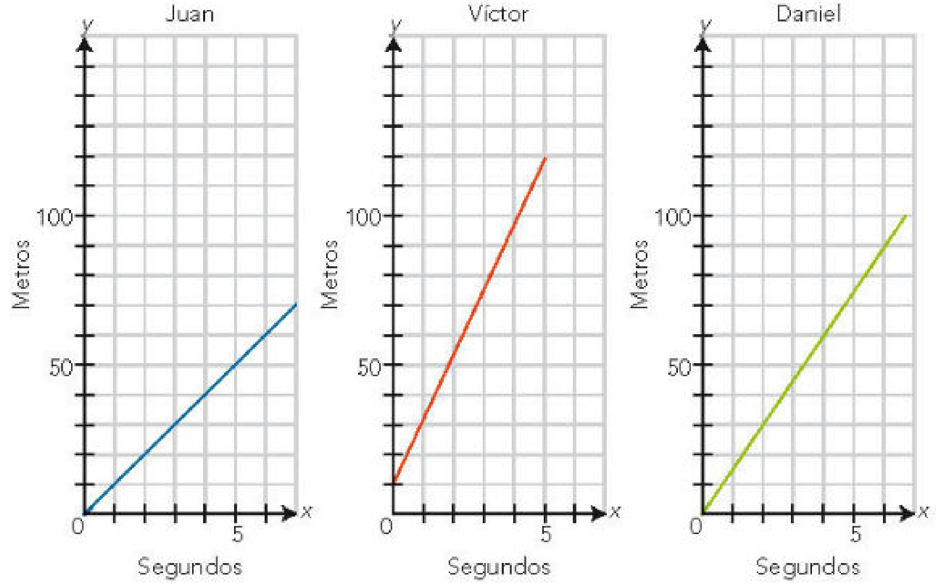
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el recorrido de Andrés? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio de los puntos *A* y *B*? ______
- En la segunda gráfica, ¿cuánto mide de base cada uno de los triángulos marcados? ______
- ¿Cuánto mide de altura cada uno de los triángulos marcados? ______
- ¿Cuál es la pendiente de la recta, es decir, $m = \frac{y}{x}$? ______

- ¿Qué relación encuentras entre la función y la pendiente? ______
- ¿Qué relación encuentras entre la pendiente y la razón de cambio? ______

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y comenten las diferencias que hayan encontrado. De manera grupal y con ayuda su profesor, reflexionen sobre las siguientes situaciones y escriban.

- ¿Por qué con la función se puede determinar la razón de cambio, sin necesidad de calcularla? ______
- ¿Por qué con la función se puede conocer la pendiente de una recta? ______
- ¿Por qué al determinar la razón de cambio de una recta, se determina también la pendiente? ______

2. El recorrido de tres corredores está representado en las siguientes gráficas.



a) ¿Cuál es la función de cada uno de los recorridos? ______

b) ¿Cuál de los tres recorridos tiene la mayor pendiente? ______

c) ¿Cuál recorrido tiene la menor razón de cambio? ______

d) ¿Cuál es la pendiente y razón de cambio de una recta horizontal? ______

Notas importantes

La pendiente o inclinación de una recta se simboliza con la letra m, y se determina con la fórmula: $m = \frac{y}{x}$

Donde:

La y corresponde a la altura del triángulo rectángulo formado entre dos puntos de la recta.

La x corresponde a la base de dicho triángulo.

Otra forma de obtener la pendiente de una recta, cuando se conocen sólo dos puntos de la recta, es obteniendo la razón de cambio.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una recta, entre mayor valor tiene su pendiente, más tenderá a la verticalidad.

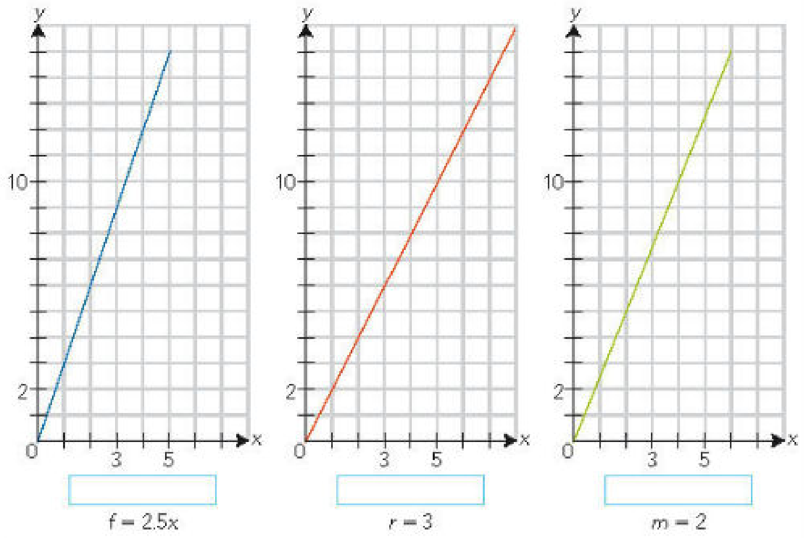
La pendiente de una recta horizontal es cero.

La función determina la pendiente y la razón de cambio. Es decir, $y = 4x$; $m = \frac{4}{1}$ y cuya razón es 4.

Lo que aprendí

1. Analiza las siguientes gráficas y relaciónalas con la pendiente, la razón de cambio o con su función, según corresponda. Escribe dentro del recuadro.

- Elige alguna de las rectas y plantea en tu cuaderno un problema que se modele con dicha gráfica.



2. Analiza la imagen y contesta:

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el costo del listón azul? ______

b) ¿Cuál es la razón de cambio al graficar la relación metro-precio del listón verde? ______

c) Si se grafican las funciones correspondientes a los dos listones, ¿cuál tiene mayor pendiente? ______

d) Grafica, en tu cuaderno, las funciones de ambos listones.

3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

Desafío

1. Resuelve el siguiente problema.

a) El punto A de una recta tiene como coordenadas $a(4, 14)$ y se sabe que su razón de cambio es 3.5. Si 9 es la abscisa del punto B, ¿cuál es la ordenada de este punto?

______

b) ¿Cuál es la función que modela esta situación?

______

c) Grafiquen la recta que corresponde a la función obtenida.

Eje temático	Manejo de la Información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Lección 27: Medidas de dispersión: desviación media y rango

Lo que sabes

1. Resuelve los siguientes problemas.
   a) Se les preguntó a 10 niños de primaria su edad. Los datos obtenidos son: 8, 6, 9, 7, 8, 10, 11, 12, 13 y 7 años. ¿Cuál es la media aritmética de estos datos?
   b) La estatura de los cinco jugadores titulares de un equipo de basquetbol es: 1.96 m, 1.80 m, 1.79 m, 1.90 m y 2.05 m; y la de los jugadores suplentes es: 1.93 m, 1.78 m, 1.82 m, 1.90 m, 1.84 m y 1.92 m. De los jugadores titulares y los suplentes, ¿cuál es el mejor promedio de estatura?
   c) El promedio de las primeras cuatro calificaciones de Roberto es 8.25. Si en el quinto bimestre saca 7, ¿cuál será el promedio de las cinco calificaciones?
   - Si Roberto debe sacar 8.6 de promedio final para ganar el premio que le otorgará su papá, entonces, ¿qué calificación debe tener en el quinto bimestre?
2. Contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿A qué se le llama media aritmética?
   b) ¿Cómo se determina la media aritmética de un grupo de datos?
   c) ¿Por qué la media aritmética es una medida de tendencia central?
3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Juntos reflexionen sobre ellas y, en caso de haber diferencias, justifíquenlas.

Actividades

1. Resuelvan los siguientes problemas.
   a) En una estación del metro se entrevistó a 20 personas solicitándoles su edad. Las respuestas fueron: 23, 17, 65, 34, 56, 59, 29, 43, 28, 63, 30, 28, 45, 51, 49, 28, 31, 65, 15 y 25
   - ¿Qué dato es el menor?
   - ¿Y el mayor?
   - ¿Cuál es la diferencia entre el dato mayor y el menor?

   b) En una fábrica, los sueldos de los diferentes empleados son, en pesos:

   4000, 850, 1800, 2500, 7800, 12000, 1500, 5900, 700 y 2100.
   - ¿Cuál es el sueldo más bajo que se paga en esta fábrica?
   - ¿Y el más alto?
   - ¿Cuál es la diferencia entre el sueldo más alto y el más bajo?
   - ¿Cuál es el promedio de los sueldos de esta empresa?

   c) Raúl tiene una fábrica de calzado y quiere producir zapatos para niños entre 4 y 15 años. Después de entrevistar a 30 niños, entre las edades mencionadas, sobre la medida de sus pies, se obtuvo la siguiente información:

   11, 18, 19, 24, 12, 10.5, 25.5, 12.5, 13, 15.5

   20, 18.5, 18, 19.5, 21, 22.5, 23, 23, 20.5, 22

   22.5, 12.5, 13.5, 14, 17, 16.5, 19, 21.5, 16.5, 23.5
   - ¿Cuál es la menor medida de los entrevistados?
   - ¿Cuál es la mayor?
   - ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y la menor?
2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen para qué nos sirve determinar el rango de un grupo de datos, es decir, la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. Escriban su conclusión.

Notas importantes

Lee la siguiente información para complementar tus ideas.

El *rango* es una medida de dispersión que muestra la diferencia existente en un conjunto de datos, al restarle al dato mayor el menor.

Por ejemplo:

34, 8, 24, 9 y 20

El dato mayor: 34

El dato menor: 8

$R = 34 - 8$

$R = 26$

La *dispersión*, es decir, el distanciamiento de los valores de este conjunto de datos es 26.

Actividades

1. Realicen lo que se les indica en cada caso.

a) Las edades de los integrantes de una familia son: 5 años, 29 años, 38 años, 14 años y 7 años. ¿Cuál es la edad promedio (media aritmética) de las edades de esta familia?

b) Analicen y completen la tabla.

Datos x	Media $\overline{x}$	$x - \overline{x}$	Valor absoluto $\lvert x - \overline{x} \rvert$
5	18.6	−13.6	13.6
29	18.6		
38	18.6	+9.4	9.4
14	18.6		
7	18.6		
Suma			

c) Contesten las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se determina el valor $x - \overline{x}$?
- ¿Qué valor toma cada dato para la columna $\lvert x - \overline{x} \rvert$?
- ¿Cuál es la suma de todos los valores de la columna $x - \overline{x}$?
- ¿Cuál es la desviación media, es decir, el promedio de la columna $\lvert x - \overline{x} \rvert$?
- En promedio, ¿qué tanto se aleja cada dato con respecto a la media?

d) Comparen sus respuestas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

2. Con los datos del problema de los sueldos de la fábrica completen la siguiente tabla.

Sueldo x	Media $\overline{x}$	$x - \overline{x}$	$\lvert x - \overline{x} \rvert$
Suma			

Glosario

Valor absoluto. Es el valor de un número, sin tomar en cuenta su signo. Por ejemplo: el valor absoluto de −6, es 6, en símbolos matemáticos $\lvert -6 \rvert = 6$.

a) Contesten las preguntas:

- ¿Cuál es la suma de la diferencia entre el sueldo y el sueldo promedio, es decir, la suma de la columna $x - \overline{x}$?
- ¿Cuál es la suma del **valor absoluto** de cada diferencia, es decir, el total de sumar la columna $\lvert x - \overline{x} \rvert$?
- ¿Cuál es la desviación media de los sueldos de esta fábrica?
- De acuerdo con la información obtenida, se puede afirmar que en promedio los sueldos de esta fábrica se alejan de la media en $2708. ¿Por qué es correcta esta afirmación?

Notas importantes

Para complementar tus ideas lee la siguiente información.

Al promedio del valor absoluto de la diferencia entre el dato y la media de ese grupo de datos se le conoce con el nombre de *desviación media*, y es una medida de dispersión, es decir, nos indica qué tanto se aleja dicho dato con respecto a la media.

Para calcular la desviación media, primero se debe obtener la media, posteriormente la diferencia de cada dato con respecto a la media $x - \overline{x}$ y su valor absoluto $\lvert x - \overline{x} \rvert$, es decir, el valor de la diferencia sin tomar en cuenta el signo.

Una vez que se conocen todos los valores absolutos de las diferencias, se suman y el resultado se divide entre el número de datos.

Esto es: $Dm = \dfrac{\Sigma \lvert x - \overline{x} \rvert}{n}$

Actividades

1. El conocimiento de las matemáticas es importante debido a que nos permite tomar decisiones acertadas. Analicen los siguientes planteamientos y respondan cada pregunta.

   a) En dos ciudades diferentes se recabó el precio de un limpiador para autos en 10 tiendas distintas; los datos obtenidos se muestran en las tablas.

Monterrey			
Datos x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$
39			
25			
28			
30			
42			
29			
31			
35			
27			
40			
Suma			

Ciudad de México			
Datos x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$
43			
39			
36			
42			
41			
40			
37			
36			
35			
44			
Suma			

- ¿Cuál es la desviación media de este producto en Monterrey? ______
- ¿Y en la Ciudad de México? ______
- ¿En cuál de estas dos ciudades el precio tiene mayor variabilidad con respecto a su media? ______
- Raúl afirma que en la Ciudad de México los precios de este producto no varían tanto de un comercio a otro. ¿Cómo se puede justificar esta afirmación? ______
- ¿Cuál es el rango para los precios de Monterrey? ______
- ¿Cuál es el rango para los precios de la Ciudad de México? ______
- De acuerdo con el rango, ¿cuáles son los datos que tienen mayor variabilidad? ______
- De acuerdo con los dos grupos de datos (desviación media y el rango) ¿cuál de éstos dos nos proporciona con más exactitud la variabilidad de los datos? ______

   b) En tres mercados del centro de la ciudad, se investigó si las tiendas de abarrotes dan el peso exacto de un kilogramo de azúcar. Los resultados obtenidos fueron los siguientes. Completa las tablas y contesta.

Mercado A			
Peso (g) x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$
980			
950			
1 020			
920			
Suma			

- ¿Cuál es la desviación media en el mercado A? ______

Mercado B			
Peso (g) x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$
970			
950			
930			
980			
Suma			

- ¿Cuál es la desviación media en el mercado B? ______

Mercado C			
Peso (g) x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\|x - \bar{x}\|$
920			
1 010			
1 000			
950			
960			
Suma			

- ¿Cuál es la desviación media en el mercado C? ______
- De acuerdo con la desviación media de los pesos despachados en cada mercado, ¿en cuál de ellos hay la menor variabilidad? ______
- Si tuvieras que comprar un kilogramo de azúcar, ¿en cuál de estos mercados la comprarías? ______
- Comparen sus resultados con los de otros equipos y reflexionen sobre el tipo de información que nos proporcionan el rango y la desviación media.

2. Con la ayuda de su profesor, escriban una conclusión sobre la utilidad que tiene el conocer el rango y la desviación media de un grupo de números. ______

Lo que aprendí

1. Resuelve el siguiente problema.

a) Teresa quiere abrir una compañía de limpieza. Tiene tres zonas donde colocarla, para lo cual está analizando los sueldos que ofrecen las compañías que ya están ubicadas en estas zonas. En la zona norte los sueldos semanales que se ofrecen son: $800, $900, $950 y $700. En la zona sur: $600, $1050, $800, $950 y $1000. En la zona oriente: $700, $800 y $750.

- De acuerdo con el rango, ¿en cuál de estas tres zonas hay mayor variabilidad en los sueldos que ofrecen?

- ¿Cuál es la variabilidad de cada zona?

Zona norte			
Sueldos x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$
Suma			

Zona sur			
Sueldos x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$
Suma			

Zona oriente			
Sueldos x	Media $\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$
Suma			

- ¿Cuál de estas zonas tiene mayor variabilidad en los sueldos que ofrecen?

- Si Teresa tiene como presupuesto ofrecer un sueldo de $1300 semanales, de acuerdo con estas medidas de dispersión, ¿en cuál zona le conviene colocar su empresa?

Desafío

1. Resuelve el siguiente problema.

a) Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kilogramos de 80 personas.

60; 66; 77; 70; 66; 68; 57; 70; 66; 52; 75; 65; 69; 71; 58; 66; 67; 74; 61; 63;

69; 80; 59; 66; 70; 67; 78; 75; 64; 71; 81; 62; 64; 69; 68; 72; 83; 56; 65; 74;

67; 54; 65; 65; 69; 61; 67; 73; 57; 62; 67; 68; 63; 67; 71; 68; 76; 61; 62; 63;

76; 61; 67; 67; 64; 72; 64; 73; 79; 58; 67; 71; 68; 59; 69; 70; 66; 62; 63; 66.

- ¿Cuál es la desviación media?

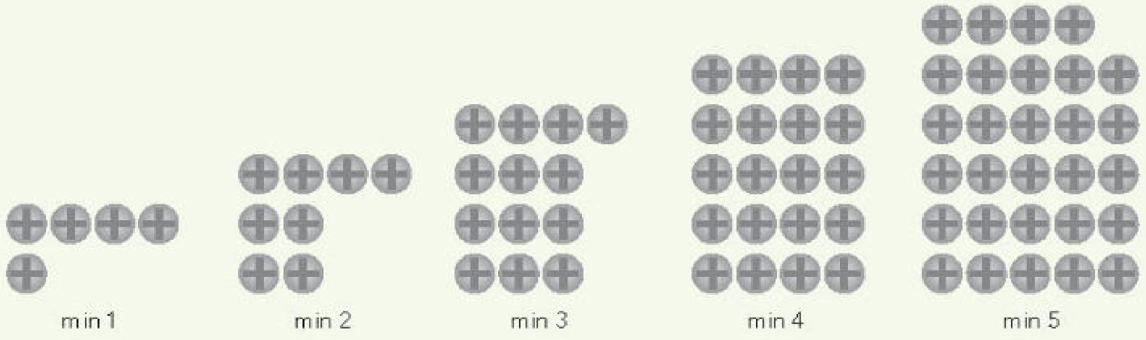
b) Coordinados por su profesor, confronten su respuesta y sus procedimientos. Reflexionen sobre las diferencias que hayan tenido.

Evaluación tipo PISA

Fabricación de tornillos

En el proceso de fabricación de tornillos, hay un momento que se conoce como tratamiento térmico, en el que se incorpora a cada tornillo un recubrimiento superficial para protegerlos contra la corrosión y mejorar su estética.

Una máquina realiza este proceso de recubrimiento de acuerdo con lo que se muestra en la imagen.



Pregunta 1: ¿Cuál es la expresión general que permite conocer el número de tornillos que reciben este tratamiento térmico en cualquier minuto?

a) $n^2 + 4$ b) $n + 4^2$ c) $4n^2$ d) $(n + 4)^2$

Pregunta 2: ¿Cuántos tornillos recubre esta máquina al minuto 10?

Pregunta 3: Se sabe que la máquina recubre 3604 tornillos. ¿En cuántos minutos realiza este tratamiento térmico?

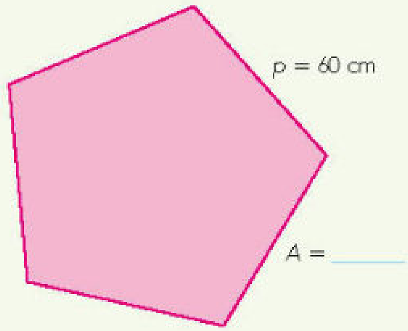
Pregunta 4: Un ingeniero registró la cantidad de minutos y la cantidad de tornillos que la máquina recubrirá, elige la palabra "Sí", en caso de que la cantidad de tornillos corresponda al número de minutos, de lo contrario elije "No".

Minutos	Tornillos	Opción	
20	400	Sí	No
35	1 229	Sí	No
18	330	Sí	No
80	6 404	Sí	No
15	229	Sí	No

Evaluación tipo PISA

El carpintero

Andrea solicitó a un carpintero una repisa en forma de pentágono regular. Sólo le exigió que el perímetro de la repisa fuera de 60 cm. El carpintero hizo el siguiente bosquejo.



Pregunta 1: ¿Cuál es el área de la repisa?

Argumenta tu respuesta.

El precio del agua

En cierta colonia donde no hay servicio de agua potable, entran 5 pipas con agua para solventar el servicio. Cada pipa tiene un precio diferente por metro cúbico de agua. Los precios son: $700, $800, $950, $650 y $750.

Pregunta 1: ¿Cuál es rango de los precios por m^3?

a) 100 b) 150 c) 200 d) 300

Pregunta 2: Una vez ordenados del menor al mayor precio, elige la palabra "Sí", si el valor delante de cada precio corresponde a la desviación con respecto a la media; de lo contrario, elige la palabra "No"

Precio	Desviación	Opción	
650	−20	Sí	No
700	−70	Sí	No
750	−20	Sí	No
800	+30	Sí	No
950	−180	Sí	No

BLOQUE 5

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientes

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Lección 28: Solución y planteamiento de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones

Lo que sabes

1. Realiza lo que se indica.

a) Contesta las siguientes preguntas.

- ¿Qué es una ecuación? ______
- ¿A qué se le llama incógnita? ______
- ¿Qué tipo de ecuaciones conoces? ______
- ¿Cuál es la diferencia entre estos tipos de ecuaciones? ______
- ¿Cuáles procedimientos conoces para resolver un sistema de ecuaciones? ______
- Escribe un ejemplo de un sistema de ecuaciones. ______
- En las actividades de tu vida cotidiana, ¿se pueden emplear algunas de las ecuaciones que conoces? ______ Describe. ______
- Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, con el apoyo de su profesor, expónganlas al grupo y justifíquenlas. Complementen sus respuestas.

b) Resuelvan las siguientes ecuaciones.

$\frac{2x}{3} - 11 = 37$	$6x + 5 = 6 - 2x$
$\begin{cases} 2x + 12y = -22 \\ 4x - 6y = 16 \end{cases}$	$x^2 + 2x = 80$

- Compara tus procedimientos con los de otros compañeros. Si usaron distintos procedimientos, discutan sobre las ventajas y/o desventajas según sus propios argumentos. Expónganlos al grupo y, con la orientación de su profesor, comprueben si obtuvieron los mismos resultados.

Actividades

1. Analicen los siguientes planteamientos y realicen lo que se indica.

a) El señor Medina hace un viaje de Naucalpan a Toluca por la autopista. Al llegar a esa ciudad cae en cuenta que de un billete de \$200 que traía le sobraron \$105 y sólo encuentra un boleto de la caseta de \$36. Si se pagan dos casetas, ¿cuánto le cobraron en la otra caseta? ______

- Describan el procedimiento que utilizaron para obtener la solución. ______
- Planteen una ecuación que represente al problema anterior. ______
- Resuélvanla en su cuaderno.

b) Mi papá trajo a la casa algunas cajas con barras de alegrías de amaranto, de dos tamaños distintos. Al preguntarle sobre su costo, él nos dijo: "por una caja grande y una chica se pagan \$156, estas últimas cuestan la mitad de lo que cuesta una grande". ¿Cuánto cuesta una caja chica y cuánto una grande? ______

- Describan el procedimiento que utilizaron para obtener la solución. ______
- Planteen una ecuación que represente al problema anterior. ______
- Elaboren en su cuaderno, el procedimiento para resolver el problema.

c) Fernando y Alejandra tienen la misma cantidad de galletas. Observen la imagen y respondan lo que se pide.

- ¿Cuántas galletas contiene cada paquete? ______
- Planteen una ecuación que modele esta situación, resuélvanla en su cuaderno.

d) Comparen sus ecuaciones y su procedimiento de solución. Con la orientación de su profesor, comprueben si obtuvieron los mismos resultados. Corrijan en caso de ser necesario.

2. En cada recuadro resuelvan las siguientes ecuaciones y planteen un problema para cada una de ellas.

a) $2x + 4 = 36$

Problema:

b) $x + 4 = 3x + 2$

Problema:

c) $\frac{x}{2} + 8 = 10$

Problema:

d) Comparen su procedimiento de solución y, con el apoyo de su profesor, expongan al grupo los problemas que plantearon. De los procedimientos que mencionaron sus compañeros, evalúen cuál de ellos es más práctico para la resolución de ecuaciones de este tipo.

Actividades

1. Planteen un sistema de ecuaciones para cada uno de los siguientes problemas. Posteriormente, resuélvanlos utilizando alguno de los métodos que conozcan.

a) En el taller de computación hay 21 alumnos. Si al doble de la cantidad de hombres se resta la cantidad de mujeres, sólo quedarían seis alumnos. ¿Cuántos hombres y cuantas mujeres hay en el taller?

- Hombres. ______
- Mujeres. ______

Sistema de ecuaciones { Ecuación 1. ______ / Ecuación 2. ______

Solución:

b) En una papelería se vendieron cuatro paquetes de hojas bond y seis paquetes de hojas de *foamy* por \$600. Si la diferencia de precios en los paquetes es de \$25 y la hojas bond son más caras, ¿cuál es el precio de cada paquete? Realicen en su cuaderno el procedimiento de solución.

- Hojas bond. ______
- Hojas de *foamy*. ______

Sistema de ecuaciones { Ecuación 1. ______ / Ecuación 2. ______

c) En un restaurante se ofrecen un desayuno y dos postres por \$150. Si el postre cuesta \$60 menos que el desayuno, ¿cuál es precio de cada cosa? Realicen en su cuaderno el procedimiento de solución.

- Postre. ______
- Desayuno. ______

Sistema de ecuaciones { Ecuación 1. ______ / Ecuación 2. ______

d) Comparen sus ecuaciones y sus procedimientos. Con la orientación de su profesor, comprueben si obtuvieron los mismos resultados. Corrijan en caso de ser necesario.

- En su cuaderno copien los distintos procedimientos usados y valoren la utilización de ellos en distintas situaciones.

2. Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones, planteen un problema para cada uno de ellos y realicen, en su cuaderno, el procedimiento de solución.

a) Sistema de ecuaciones $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } x + 4y = 6 \\ \text{Ecuación 2: } 4x - 2y = 6 \end{cases}$

Problema: ______

b) Sistema de ecuaciones $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } 2x + 12y = -22 \\ \text{Ecuación 2: } 4x - 6y = 16 \end{cases}$

Problema: ______

c) Sistema de ecuaciones $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } 6x + 3y = 42 \\ \text{Ecuación 2: } 5x - 5y = 5 \end{cases}$

Problema: ______

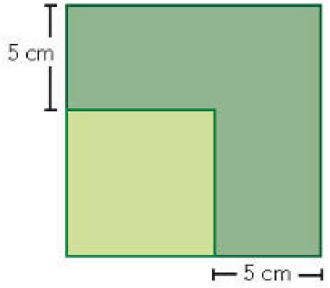
d) Comparen su procedimiento de solución con el de otros compañeros. Con el apoyo de su profesor, expongan al grupo los problemas que plantearon y escriban en su cuaderno otro de los que mencionaron sus compañeros para cada sistema.

Actividades

1. Planteen la ecuación que corresponda a cada uno de las siguientes situaciones y , con ayuda de su profesor, organícense para resolverlas, de manera que algunos utilicen la factorización y otros la fórmula general.

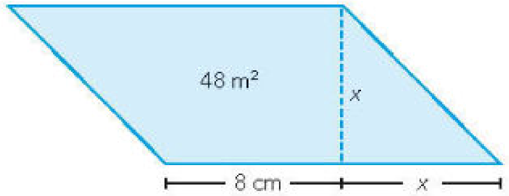
   a) El área de juegos de un jardín de niños se amplió 5 m más por cada lado. Si siempre ha tenido forma cuadrada y ahora tiene una superficie de 144 m², ¿cuál era la superficie antes de la ampliación? ______

   - Valoren cuál es el método de solución más práctico para resolver esta situación.



   b) La siguiente figura es el vidrio central que forma parte de una mesa de madera.

   - ¿Cuánto mide la base? ______
   - ¿Cuánto mide de ancho? ______



   - Valoren cuál es el método de solución más práctico para resolver esta situación.

   c) En el proyecto de construcción de un restaurante se destinará una superficie rectangular para el área de la terraza. Lo único que han indicado es que el ancho debe ser seis metros menor que el largo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la terraza? ______

   - Valoren cuál método de solución es más práctico para resolver esta situación.

   d) Comparen sus ecuaciones y su procedimiento de solución. Con la orientación de su profesor comprueben si obtuvieron los mismos resultados. Corrijan en caso de ser necesario.

   - Analicen y comenten sobre los procedimientos usados y valoren la utilización de ellos en distintas situaciones.

2. Analicen las siguientes ecuaciones, planteen un problema para cada una de ellas y realicen, en su cuaderno, el procedimiento de solución.

   a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   Problema: ______

   b) $x^2 = 8x$

   Problema: ______

   c) $x^2 + 6x + 8 = 35$

   Problema: ______

   d) Comparen su procedimiento de solución con el de otros compañeros. Con el apoyo de su profesor, expongan al grupo los problemas que plantearon. Copien en su cuaderno otro de los que mencionaron sus compañeros para cada una de las ecuaciones planteadas.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Existen diversas situaciones y/o problemas que pueden originar ecuaciones lineales, cuadráticas o bien un sistema de ecuaciones.

Recuerda que cada ecuación se resuelve considerando distintos procedimientos (algunos pueden ser hasta personales). Es conveniente que repases tus conocimientos sobre los procedimientos de solución y que los valides junto con tu profesor. Se dan las siguientes orientaciones, para que con base en ellas dirijas tu estudio.

- Ecuaciones lineales: la mejor manera de resolverlas es aplicando las propiedades de la igualdad.
- Ecuaciones cuadráticas: para este tipo de ecuaciones, y dependiendo de la forma de la ecuación, puedes usar propiedades de la igualdad o factorización (binomio al cuadrado, binomios conjugados y binomios con término común), y de manera especial puedes aplicar la fórmula general (considérala, al igual que debes elegir bien los valores para *a*, *b* y *c*).
- Sistemas de ecuaciones: una vez que se ha planteado, puedes elegir de entre tres métodos algebraicos; suma y resta, sustitución e igualación. Usa el que consideres más conveniente.

Sólo que la situación a resolver lo requiera, puedes considerar el uso del método gráfico.

De acuerdo con el profesor, elabora fichas de resumen en las que describas las distintas formas de resolver ecuaciones.

Lo que aprendí

1. Resuelve los siguientes problemas planteando la ecuación que represente la situación, escribe las ecuaciones y realiza los procedimientos de solución en tu cuaderno.

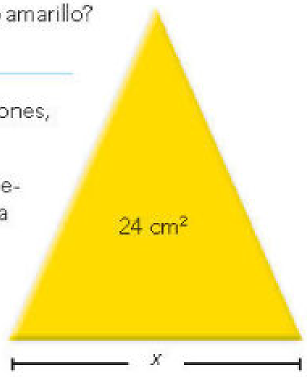
   a) Un técnico en máquinas y herramientas gana $70 por hora cuando trabaja de noche y $30 cuando trabaja de día, si en un tiempo de 8 horas de trabajo recibe $360, ¿cuántas horas trabajó de día?

   ______

b) A una escuela secundaria le donan un terreno rectangular para construir canchas de volibol y basquetbol. Si el terreno tiene un perímetro de 210 m y tiene de largo el doble del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno? ______

c) Si la altura es 2 cm más largo que la base, ¿cuánto mide la altura del triángulo amarillo?

______



d) En grupo, y con la orientación de su profesor, comprueben si las ecuaciones, así como los resultados, corresponden o no al problema planteado.

2. En tu cuaderno plantea un problema para cada una de las ecuaciones . Resuelve el sistema usando el método de igualación y la ecuación cuadrática por fórmula general.

a) $2x + 8 = 5x - 1$ b) $x(x + 6) = 160$

c) Sistema de ecuaciones $\begin{cases} \text{Ecuación 1. } 2x + y = 29 \\ \text{Ecuación 2. } x - y = 10 \end{cases}$

d) Con apoyo del profesor, expón al grupo tus problemas y soluciones. Posteriormente escribe, en tu cuaderno, uno de los problemas que te haya parecido más interesante.

Desafío

1. Resuelvan el siguiente problema.

a) Fernando fue a la papelería con \$70 para comprar lápices y repartirlos entre sus compañeros de taller (uno para cada quien), pero los lápices que requería costaban \$1.50 más caros, así que compró seis menos de los que tenía pensado comprar. ¿Cuántos compañeros tiene Fernando en su taller?

______

- Argumenten su respuesta y escriban el procedimiento que siguieron.

- Planteen una ecuación que represente el problema y resuélvanla.

- De manera grupal, expongan su resultado y el procedimiento que siguieron. Con el apoyo de su profesor, comprueben si el resultado es o no correcto. Corrijan si es necesario.
- Con la orientación de su profesor, analicen si las ecuaciones planteadas corresponden o no al problema presentado. Escriban a continuación la ecuación a la que lleguen de común acuerdo. ______

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

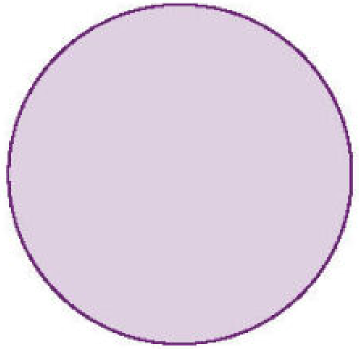
Lección 29: Cortes en un cilindro o un cono recto

Lo que sabes

1. Contesta las preguntas y realiza lo que se indica.

a) ¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?

______



- Señala en la siguiente imagen el círculo y la circunferencia.
- Señala el centro.
- Explica el procedimiento que seguiste para encontrar el centro.

______

- En el círculo traza con color rojo el radio; con azul, el diámetro; con negro, una cuerda.
- Toma las medidas necesarias y calcula su perímetro y área.

Perímetro: ______ Área: ______

b) Compara tus respuestas y la imagen (con los trazos realizados) con los de otros compañeros. Apoyados por su profesor, analícenlos y corrijan si es necesario.

c) ¿Qué es un cuerpo de revolución? ______

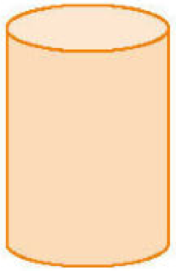
d) En cada recuadro realiza el dibujo del cuerpo solicitado. Anota cuáles son sus elementos y escribe los conceptos de cada uno.

Cono (dibujo y elementos)	Definición: ______

Cilindro (dibujo y elementos)	Definición:

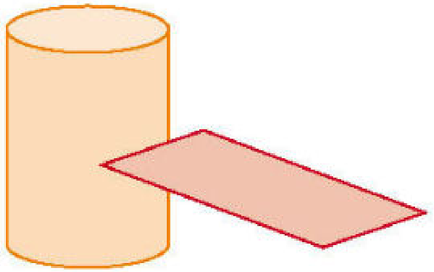
Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y contesten las preguntas.



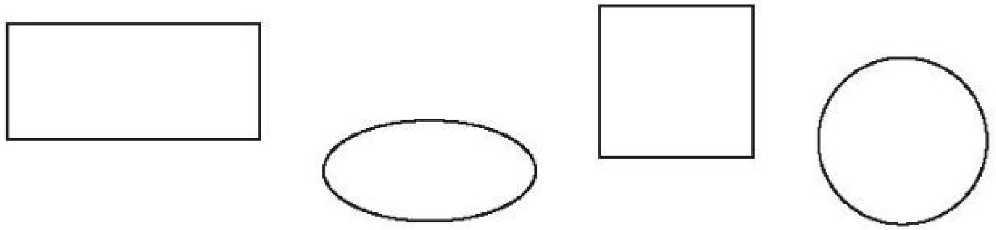
a) Observen el siguiente cilindro y respondan.

- ¿Qué objetos o cosas conocen que tengan la misma forma que este cuerpo geométrico? ______
- Si tuvieran alguno de ellos y lo colocaran sobre su mano, de frente, sin ver sus tapas, ¿qué forma geométrica se observaría? ______
- ¿Se puede colocar en alguna otra posición para observar otra figura? ______



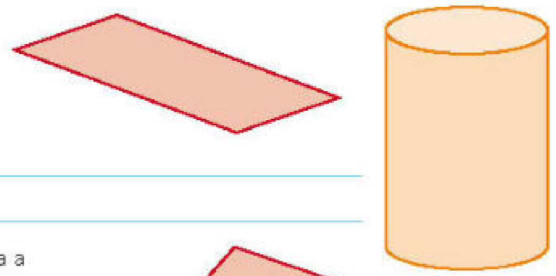
b) Analicen la siguiente imagen en la que se simula hacer un corte al cilindro anterior.

- Al hacer corte recto y paralelo a la base, si separamos las partes, ¿qué figura se observa? Coloreen de rojo la figura que se origina.



- Argumenten el porqué de su elección. ______

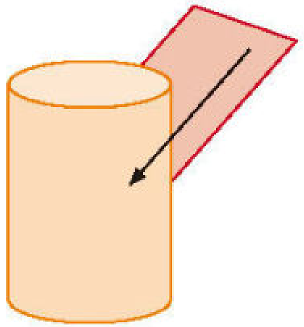
c) Señalen la posición en donde debe colocarse la lámina para hacer un corte y generar así un rectángulo.



- Expliquen cómo debe ser el corte.

______

d) Si el corte es **oblicuo** a la base, como se muestra a continuación.



- ¿Qué figura que se genera? ______
- Argumenten su respuesta. ______

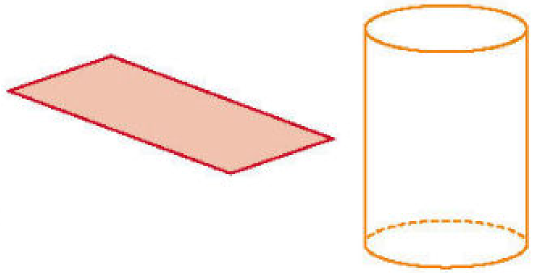
Glosario

Oblicuo. Inclinado o desviado de la horizontal.

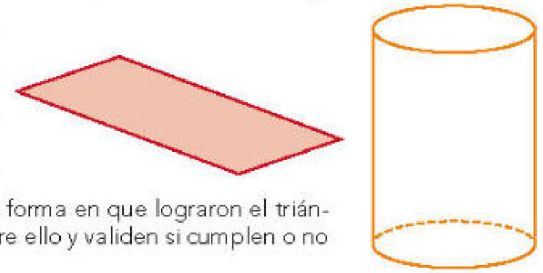
e) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y, con apoyo de su profesor, propónganlas al grupo y analicen si cumplen o no con las condiciones requeridas.

2. Con base en el análisis que realizaron grupalmente, ahora señalen la posición en que debe colocarse la lámina para cortar el cilindro y generar un triángulo. Posteriormente, describan la forma de hacer el corte.

a) Tracen con color la forma en que se observará esta figura.



- ¿Cómo deben hacer el corte? ______
- Analicen las situación anterior y propongan una figura distinta que se pueda obtener al realizar un corte. Señálenla igual que en el ejercicio anterior.
- Figura: ______ Tracen con color la forma en que se observa esta figura.
- ¿Cómo deben hacer el corte? ______



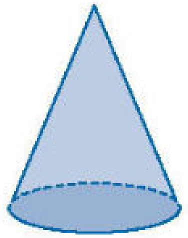
b) Con apoyo de su profesor, expongan al grupo la forma en que lograron el trián-gulo y la figura que encontraron. Reflexionen sobre ello y validen si cumplen o no con lo que se propuso.

3. Realiza en casa una serie de cortes que muestren lo que se realizó en las actividades anteriores, utilizando modelos en plastilina, unicel o cualquier otro material con que se puedan modelar estas situaciones. Con la dirección de tu profesor, organiza con tus compañeros una exposición de los trabajos realizados.

Actividades

1. Con base en la actividad realizada con el cilindro, analicen los siguientes planteamientos y contesten lo que se indica.

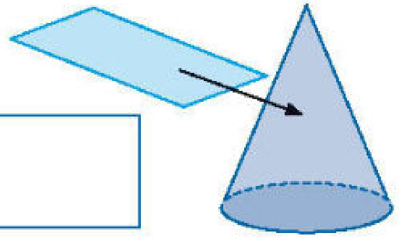
a) Si colocan un cono sobre la mesa y lo observan desde arriba, de manera que puedan verlo sobre su cúspide, ¿cómo es la imagen que se aprecia? ____________ Dibújenla en el recuadro.



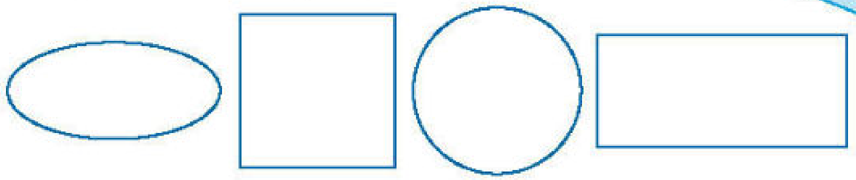
• Discutan sobre la forma que se vería si lo colocaran en una mesa de vidrio y lo miran desde abajo, ¿sería igual que verlo desde arriba? _____ ¿Cuál sería la diferencia? ____________

• Argumenten su respuesta. ____________

b) Si realizan un corte de manera oblicua con respecto a la base.

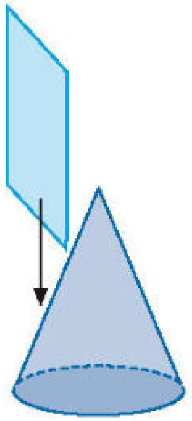


• Coloreen de azul la figura que se origina.



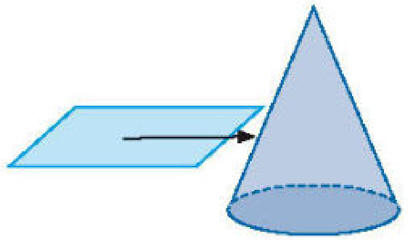
• Argumenten su respuesta. ____________

c) Dibujen en los recuadros la figura que se origina al hacer los cortes como se indica a continuación.



• Perpendicular a la base.

• Argumenten su respuesta. ____________



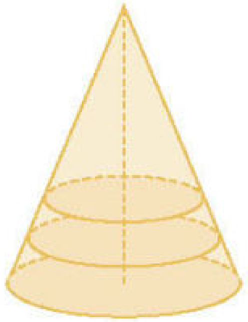
• Paralela a la base.

• Argumenten su respuesta. ____________

d) Comparen sus dibujos con los de otros compañeros. Discutan sobre los argumentos que formularon para determinarlos y, con el apoyo de su profesor, muestren al grupo lo que determinaron y corrijan, en caso de ser necesario.

Actividades

1. Analicen la siguiente situación y contesten las preguntas.



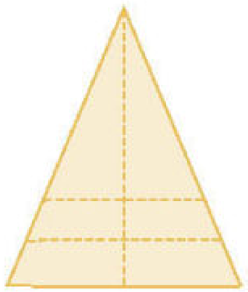
a) Observen la figura. Considerando que se señalan distintos cortes de manera paralela a la base respondan.

• ¿Cuáles son las figuras que se originan en cada corte? ____________

• ¿Qué sucede con estas figuras al hacer los cortes cada vez más cercanos a la cúspide? ____________

• Reflexionen si es cierto o no que el centro de cada círculo coincide con la altura del cono. Escriban una conclusión acerca de esto. ____________

• Tracen, sobre la imagen, con color rojo el radio correspondiente a cada círculo.

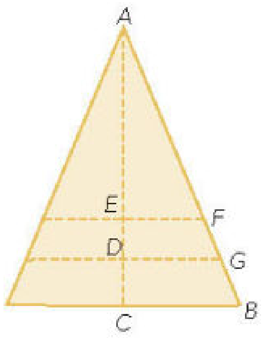


b) De acuerdo con la imagen anterior, argumenten si la siguiente imagen corresponde o no al hacer un corte perpendicular a la base que coincide con la altura del cono. ____________

• Con respecto a la figura del inciso a, ¿qué representan las líneas horizontales entre la base y la cúspide? ____________

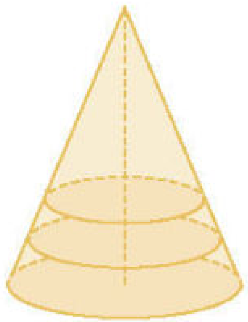
• ¿Y la línea vertical? ____________

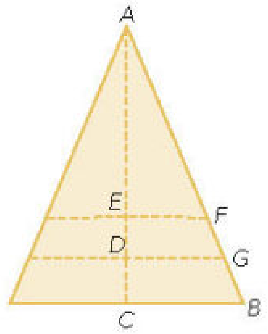
- Si se asignan las letras a los puntos como se muestra en la imagen.



- ¿Qué tipo de triángulos son *ABC*, *AGD* y *AFE*? ______
- Justifiquen por qué se puede o no afirmar que entre ellos existe una relación de semejanza. ______

c) Si de la primera imagen se obtuvo la segunda.



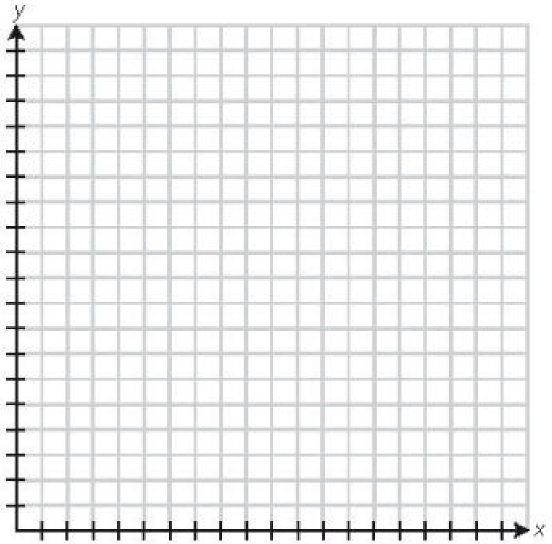


- ¿Qué representan las distancias *CB*, *DG* y *EF*? ______
- ¿Y la distancia *AC*? ______
- Argumenten sus respuestas. ______
- Suponiendo que una veladora tiene forma de cono y se observa como la figura anterior. Su altura es de 18 cm y el radio de la base es de 6 cm. ¿Cuál es la medida de *DG* si el corte se realizó a 3 cm de la base? ______
- Escriban el procedimiento que realizaron para obtener la respuesta anterior. ______

d) Con la orientación de su profesor, expongan al grupo sus respuestas y procedimientos. Elaboren una conclusión en la que expliquen la relación que hay entre los radios de los círculos originados al hacer cortes paralelos a un cono y su altura. Escríbanla. ______

2. Con base en la conclusión anterior, tracen la gráfica que representa la relación entre las diferentes alturas del cono, que se obtienen al hacer cortes paralelos a su base, y el radio de los círculos que se forman. Consideren las medidas del ejercicio 1, inciso c.

Alturas (h)	Radios (r)
18	6
17	
16	
15	
14	
13	
12	
11	
10	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

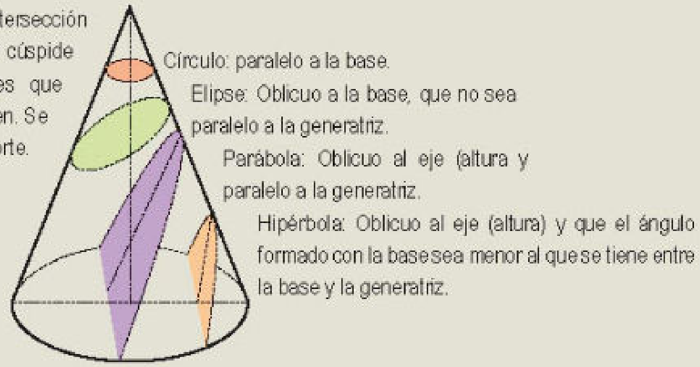


- ¿Qué representa la coordenada (0,0)? ______
- Con la orientación de su profesor, realicen de manera grupal una interpretación de la tabla y gráfica realizadas. ¿De qué tipo de variación se trata? ______ Escriban una conclusión. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por la cúspide ni coincide con la generatriz. Las secciones que se generan son las que se muestran en la imagen. Se indican sus nombres y las características del corte.

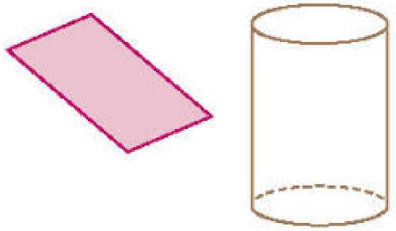


Enlázate

Para que amplíes los contenidos revisados en esta lección, consulta en los siguientes sitios:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/conicas-secciones.html.
http://www.ditutor.com/geometria_analitica/secciones_conicas.html.
http://www.dmae.upct.es/~pepemar/conicas/index.htm.
(Consulta: 20 de enero de 2017 a las 16:29 horas.) Con el resto del grupo y, organizados por su profesor, realicen una lluvia de ideas y compartan dudas o cosas nuevas que hayan descubierto en las páginas sugeridas. Elabora un reporte en tu cuaderno.

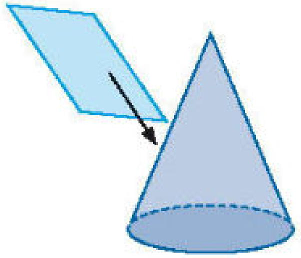
Lo que aprendí

1. De acuerdo con los siguientes planteamientos realiza lo que se indica. Considera los cortes que se harían a un cono o a un cilindro.
   a) Señala la posición en que debe colocarse la lámina para cortar el cilindro y generar un trapecio. Posteriormente describe la forma de hacer el corte. (Traza con color la forma en que se observa esta figura).



   • ¿Cómo deben hacer el corte? ______

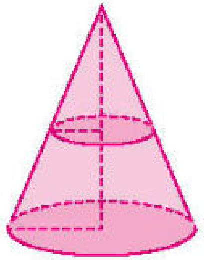
   b) Dibuja en el recuadro que figura se origina al hacer el corte como se indica a continuación.



   • Paralelo a la generatriz.

   • Argumenta el porqué de tu dibujo. ______

2. Un cono de 32 cm de altura es usado como contenedor de agua. Si se recorta a 12 cm de la base y tiene un radio de 5 cm, ¿cuál es la longitud del diámetro de la base? ______ Escribe en el recuadro, el procedimiento que realizaste.



3. Compara con lo que hicieron otros compañeros y en grupo, con apoyo de su profesor, analicen sus respuestas y corrijan si es necesario.

Desafío

1. Se quiere generar un rectángulo del mayor tamaño posible. Si el cilindro mide 2.5 cm de radio y 8 cm de altura, ¿cuál es el perímetro y el área del rectángulo mayor? ______
   Justifica tu respuesta. ______
   a) Describe la forma en que debe realizarse el corte. ______
   b) Marca sobre el siguiente cilindro, los puntos donde debe gerarse el corte para conseguir el rectángulo.

Horizonte cultural

Apolonio de Perga

Nació alrededor del 262 a.n.e. en Perga, Grecia Ionia (hoy Turquía). Cursó estudios en Alejandría y luego visitó Pérgamo. Fue conocido como "El gran geómetra". Su famoso libro *Secciones Cónicas* introdujo los términos: parábola, elipse e hipérbola espiral. Inventó el tornillo en el año 200 a.n.e. El invento se generó a partir del desarrollo de la geometría de la hélice espiral. Creó los cimientos de la geometría a través de un compendio de 8 libros titulados *Tratado de las cónicas*. Los libros del 1 al 4 no contienen material original, pero introducen las propiedades básicas de cónicas que fueron conocidas por Euclides, Aristóteles y otros. Los libros del 5 al 7 son originales; en estos discute y muestra cómo muchas de las cónicas pueden ser dibujadas desde un punto. Da proposiciones determinando el centro de curvatura, lo cual conduce inmediatamente a la ecuación cartesiana del desarrollo de la evolución. El libro número 8 de *Secciones Cónicas* está perdido, mientras que de los libros del 5 al 7 sólo existen en traducción arábiga. Sabemos que obtuvo una aproximación de *pi* entre $\frac{22}{7}$. Consideró un solo cono y hace variar la oblicuidad del plano que lo corta. De esta manera, obtuvo como curva fundamental la parábola cuya ecuación es $y^2 = 2pix$. Las otras dos curvas las caracteriza por: $y^2 < 2pix$, que equivale a la hipérbola ("exceso"). En *Sobre el espejo ardiente* mostró que rayos de luz paralelos no caen a un foco en un espejo esférico (como había sido previamente pensado) y discutió las propiedades focales de un espejo parabólico. También fue fundador de la astronomía matemática griega, en la cual usó modelos geométricos para explicar la teoría planetaria. Además, se le atribuye la invención del reloj solar. Falleció alrededor del 190 a.n.e., en Alejandría, Egipto.

FUENTE: http://www.buscabiografias.com/bios/biografia/verDetalle/9147/Apolonio%20de%20Perga. (Consulta: 2 de febrero de 2013, a las 9:30 horas.)

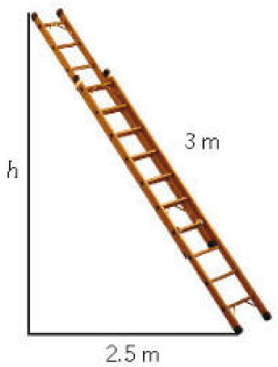
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Lección 30: Volumen de cilindros y conos

Lo que sabes

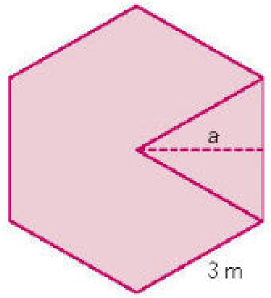
1. Aplica tus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras y el cálculo de áreas y perímetros, analiza las siguientes situaciones y realiza lo que se indica.

   a) Una escalera, con las medidas que se muestran en la figura, está apoyada sobre la pared. Obsérvala y responde.

   - ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared? ______
   - ¿A qué distancia de la pared habrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 3 m? ______

2. Los planos del kiosco del pueblo de Pedro tienen los datos que se muestran en la imagen.

   Glosario

   Apotema. Longitud del centro de un polígono regular al centro de uno de sus lados.

   a) ¿Calcula la longitud de la **apotema**? ______

   b) ¿Cuánto mide de perímetro el kiosco? ______

   c) ¿Cuánto mide de área? ______

   d) Escribe la fórmula que utilizaste para calcular el área del kiosco. ______

3. Se va a colocar una tapa a un tinaco para agua. Si se sabe que el radio de la tapa debe ser de 28 cm, ¿cuál es el área que debe cubrir la tapa? ______

   a) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. ¿Obtuvieron los mismos resultados? ______ Comenten y reflexionen sobre los procedimientos empleados.

   b) Coordinados por su profesor, acuerden procedimientos adecuados para resolver los problemas anteriores.

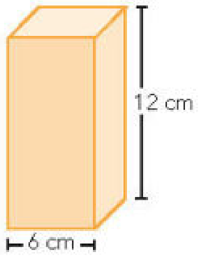
Actividades

1. Cada equipo elija dos de los sólidos que se muestran en la imagen y realicen lo que se indica. Coordinados por su profesor, asegúrense que se repartan todos los sólidos.

Glosario

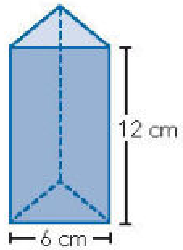
Superficie. Extensión en que sólo se consideran dos dimensiones, altura y anchura. Para estos casos se considera la superficie como la forma que tiene una figura plana.

a)



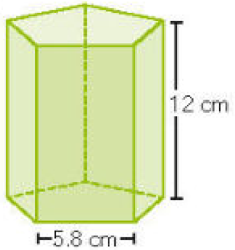
- ¿Qué **superficie** tiene la base de la caja? ______
- ¿Cuál es el área de la base de la caja? ______
- ¿Cuál es su volumen? ______

b)



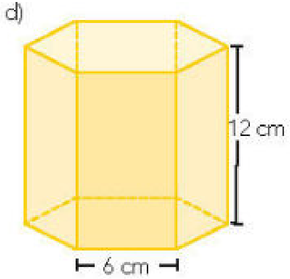
- ¿Qué superficie tiene la base de esta caja? ______
- ¿Cuánto mide la altura del triángulo? ______
- ¿Cuál es el área de la base? ______
- ¿Cuál es el volumen de esta caja? ______

c)



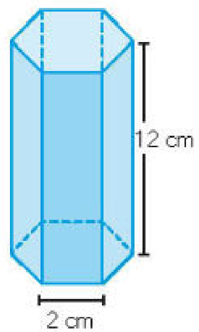
- ¿Cuál es la superficie de la base de la caja? ______
- Calculen el valor de la apotema del pentágono. ______
- Calculen el área de la base. ______
- Calculen el volumen de la caja. ______

d)



- ¿Cuál es la superficie de la base de la caja? ______
- Calculen el valor de la apotema del hexágono. ______
- Calculen el área de la base. ______
- Calculen el volumen de la caja. ______

e)



- ¿Cuál es la superficie de la base de la caja? ______
- Calculen el valor de la apotema del hexágono. ______
- Calculen el área de la base. ______
- Calculen el volumen de la caja. ______

f) Coordinados por su profesor, cada equipo exponga sus procedimientos para resolver los problemas anteriores y, en caso de haber diferencias, argumenten y justifiquen sus resultados.

2. Analicen la siguiente situación y posteriormente realicen lo que se indica.

a) Luis quiere saber el volumen de un tambo para agua cuyas dimensiones se muestran en la imagen.

- ¿Cuál es la superficie de la base? ______
- ¿Cuánto mide el área de la base? ______
- ¿Cuál es el volumen del tambo? ______
- Escriban la fórmula que utilizaron para calcular el volumen del cilindro. ______

b) Escriban en el siguiente recuadro las semejanzas para calcular el volumen de los prismas rectos y el del cilindro.

c) Orientados por su profesor, concluyan sobre la forma de calcular el volumen de cualquier cilindro.

Notas importantes

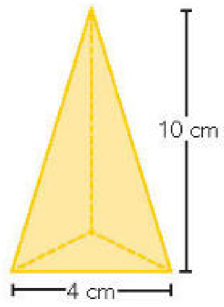
Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Al igual que en un prisma, para calcular el volumen de un cilindro, primero es necesario calcular el área de la base; posteriormente se multiplica por su altura, es decir, se aplica la fórmula: $V = (A_b)(h)$ donde A_b es el área de la base y h es su altura.

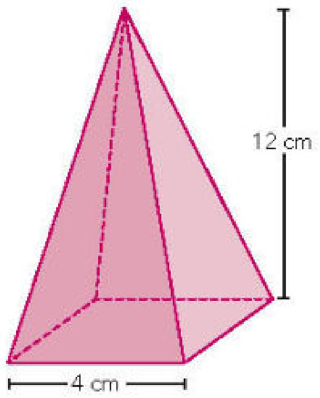
Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y respondan a cada planteamiento, retomando las fórmulas para el cálculo del volumen.

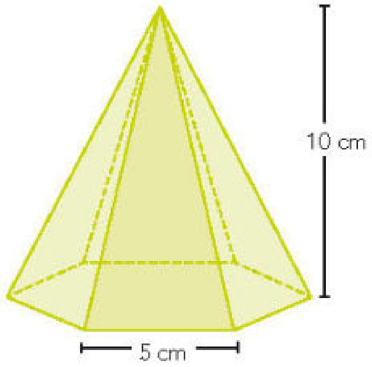
a) Realicen lo que se pide en cada uno de los siguientes sólidos.



- Escriban la fórmula para calcular el volumen de la pirámide triangular. ______
- ¿Cuál es su volumen de esta caja? ______

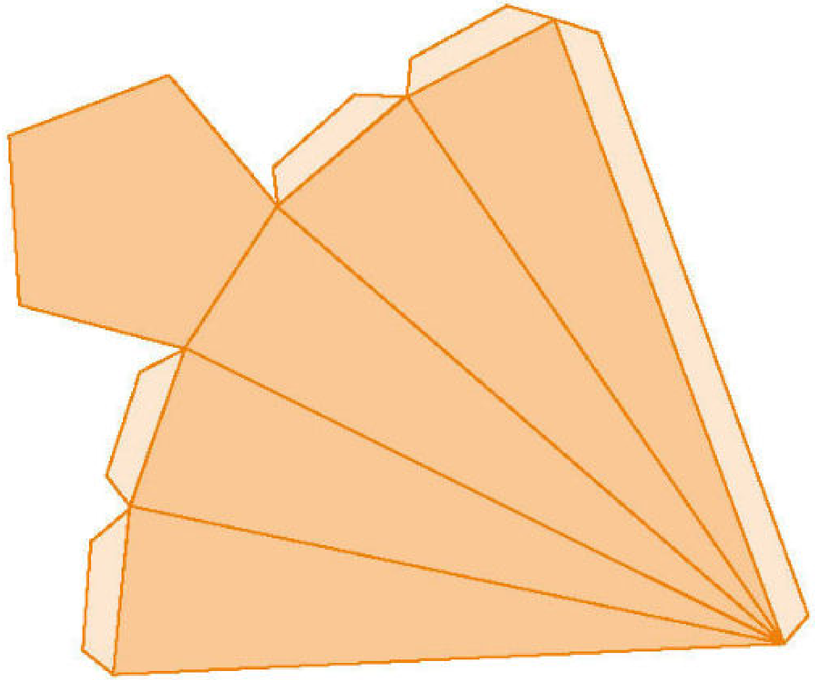


- Escriban la fórmula para calcular el volumen de la pirámide. ______
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide? ______



- Si la base es un hexágono regular, ¿cuál es la longitud de la apotema de la base? ______
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide? ______

b) Margarita encontró el desarrollo plano de una pirámide pentagonal como la de la siguiente imagen.



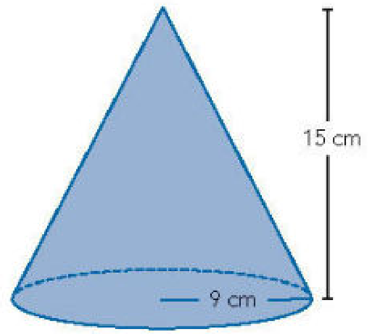
- Auxíliense de un juego de geometría y escriban sobre la imagen las longitudes necesarias para calcular el volumen de la pirámide.
- ¿Cuál es la longitud de la apotema? ______
- ¿Cuál es el área de la base? ______
- Escriban el volumen de la pirámide. ______

c) En un pedazo de cartoncillo, realicen lo siguiente.

- Dibujen el desarrollo plano de la pirámide pentagonal que encontró Margarita.
- Armen la pirámide correspondiente sin pegar la tapa.
- Realicen el desarrollo plano de un prisma pentagonal cuya base y altura sean iguales que las de la pirámide anterior.
- Con la ayuda algún material como arroz, lentejas o arena. Analicen la relación que existe entre el volumen de la pirámide y el prisma construidos.

d) Coordinados por su profesor, en plenaria, argumenten sobre los resultados y procedimientos empleados. Escriban sus conclusiones. ______

2. Tomando como base los procedimientos y las fórmulas empleadas para calcular los volúmenes de las pirámides anteriores, calculen el volumen del siguiente cono. $V =$ ______



a) Comparen su respuesta con la de otro equipo y en caso de haber diferencias, justifíquenlas.

b) Coordinados por su profesor, concluyan sobre las semejanzas para calcular el volumen de pirámides y el volumen de conos. Escriban la o las conclusiones en sus cuadernos.

P 3. Construyan con cartoncillo un cilindro y un cono con la misma base y altura.

a) Llenen con algún material (como arena, lentejas, maíz, etcétera) el cilindro y reflexionen sobre la relación que hay entre los volúmenes de ambos sólidos.

b) Comenten con otra pareja acerca de lo que observaron entre los volúmenes de su cono y su cilindro.

c) Consideren las reflexiones anteriores y, en una plenaria, orientados por su profesor acuerden una fórmula que permita calcular el volumen de un cono.

d) Escriban sus conclusiones acerca del volumen de un cilindro y de un cono, cuando tienen la misma base y la misma altura. ______

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

Al igual que en una pirámide, para calcular el volumen de un cono, primero es necesario calcular el área de la base: posteriormente se multiplica por su altura, es decir, se aplica la fórmula: $V = \frac{(A_b)(h)}{3}$, donde A_b es el área de la base y h es su altura.

Lo que aprendí

i 1. Aplicando las fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros y conos, analiza y resuelve los siguientes problemas.

a) Para el convivio del 14 de febrero, a Antonio le encargaron llevar agua de horchata. Para ello, consiguió un recipiente cilíndrico cuyas medidas son: 18.5 cm de radio de la base, y 44 cm de altura. ¿Cuál es el volumen del recipiente?

______

b) Amalia llevó vasos en forma de cono. Las dimensiones de cada cono son: 9 cm de diámetro de la base y 12 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de cada vaso?

______

Enlázate

Para que aclares tus posibles dudas o amplíes tus conocimientos sobre el cálculo del volumen de cilindros y conos, te sugerimos que visites la siguiente página.

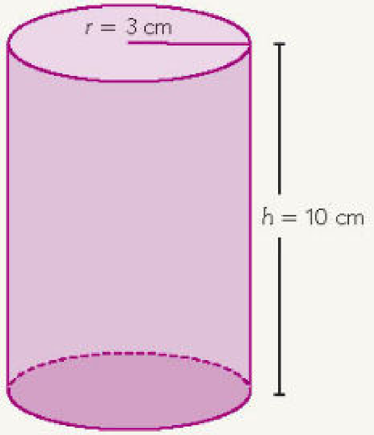
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/2esoquincena10.pdf (Consulta: 20 de enero de 2017 a las 16:37 horas.)

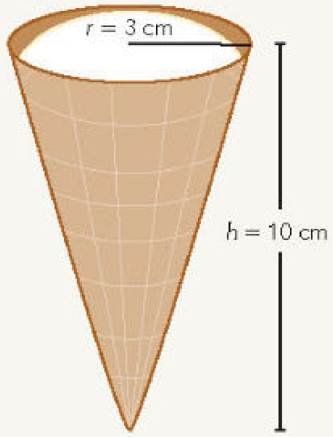
Resuelve los problemas que se plantean. Una vez resueltos, confróntalos con las soluciones que se proporcionan. Posteriormente comenta con otros compañeros acerca de las dificultades que encontraron y cómo las superaron.

Desafío

1. Analiza la siguiente situación y contesta lo que se pregunta.

   a) Don Alfredo vende helados de yogur. En cierta ocasión se le presentó la posibilidad de venderlos en conos o en cilindros. ¿En cuál de los siguientes envases le conviene vender sus helados, si en ambos casos el precio de venta es el mismo? Argumenta tu respuesta.





   b) Para un consumidor, ¿cuál es el recipiente que le conviene?

   c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, orientados por su profesor, reflexionen sobre ellas y sus respectivos procedimientos.

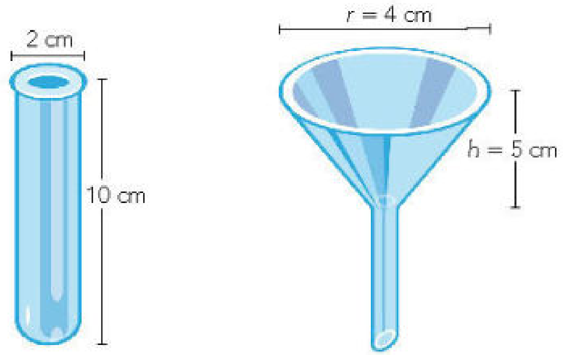
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Lección 31: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos

Lo que sabes

1. Analiza la siguiente situación y contesta aplicando las fórmulas para el cálculo del volumen de conos y cilindros.

   a) Para la práctica de laboratorio, Armando llevó un tubo de ensayo y Juana llevó un embudo con las dimensiones que se muestran en la imagen.



   - ¿Cuál es el volumen de cada instrumento?

   b) Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros compañeros y, orientados por su profesor, reflexionen sobre ellos.

Actividades

1. Analicen cada situación y respondan.

   a) Laura llevó dos litros de agua para la práctica de laboratorio.

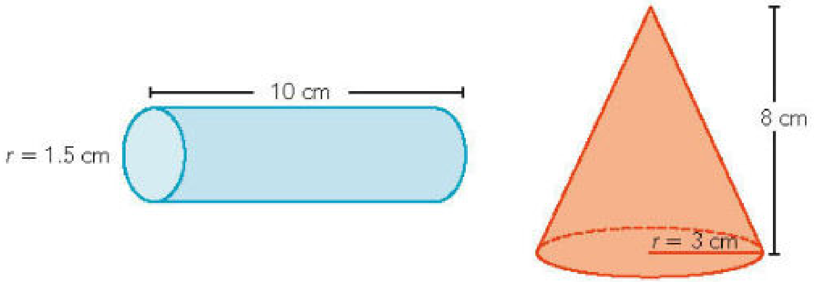
   - ¿Cuántas veces podrá llenarse el tubo de ensayo que llevó Armando?
   - Si se coloca un tapón en el cuello del embudo de Juana, ¿cuántas veces podrá llenarse?

   b) Si el embudo fuera cilíndrico en vez de **cónico** y tuviera las mismas dimensiones, ¿cuántas veces se podría llenar con los dos litros de agua?

Glosario

Cónico. Cada una de las curvas que resultan de la intersección de un plano con un cono circular recto, lo que origina una elipse, una parábola o una hipérbola.

2. Para la misma práctica, Ernesto llevó arena en un cilindro, que debe ser depositada en un cono de plástico como el que llevó Aurora. Ambos recipientes se muestran en las imágenes.



a) ¿Tendrá el cono la capacidad suficiente para recibir la arena contenida en el cilindro? ______

- Escriban en el siguiente espacio el argumento para su respuesta. ______
- Auxíliense de su calculadora y reflexionen sobre lo cercano o lo alejado que estuvieron sus estimaciones.

b) Coordinados por su profesor, en una lluvia de ideas, discutan sobre las estrategias adecuadas para dar respuesta aproximada a los problemas anteriores, así como la relación entre las medidas de capacidad y de volumen. Escriban sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3. Reflexionen sobre las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.

a) Se sabe que María llevó a su convivio un garrafón de forma cilíndrica que contenía cinco litros de agua.

- Si el radio de la base es de 10 cm, ¿cuál es la altura del cilindro? ______
- Realicen en el siguiente espacio el dibujo que modele esta situación. Anoten las operaciones necesarias para resolverla.

- Orientados por su profesor, expongan ante el grupo sus resultados y sus procedimientos y discutan sobre las estrategias empleadas para resolver el problema.

b) El cilindro que llevó Mario tenía capacidad para 8 litros de agua, y se sabe que su altura era de 50 cm.

- ¿Cuál es el diámetro de su cilindro? ______

- Escriban en su cuaderno, el procedimiento para resolver el problema y realicen el dibujo que lo modele.
- Comparen su repuesta con la de otro equipo y, orientados por su profesor, concluyan acerca de la forma de resolver este tipo de problemas. ______

c) Resuelvan en casa el siguiente problema.

- Se van a almacenar 120 m³ de maíz en un silo cilíndrico cuyo diámetro es de 8 m. ¿Cuál debe ser la altura del silo para que quepan los 120 m³ de maíz? ______
- Compartan sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo y apoyados por su profesor reflexionen sobre éstos.

Notas importantes

Considera la siguiente información para complementar tus ideas.

La capacidad y el volumen son términos equivalentes pero no iguales. La capacidad es el espacio vacío de un sólido, suficiente para contener algo en su interior. Por ejemplo, el litro es una unidad de capacidad y el decímetro cúbico es una unidad de volumen, de manera que: a un recipiente cuyas aristas midan 1 dm³ le cabe 1 litro de agua, por lo que puede afirmarse lo siguiente.

$1\ dm^3 = 1\ \ell$

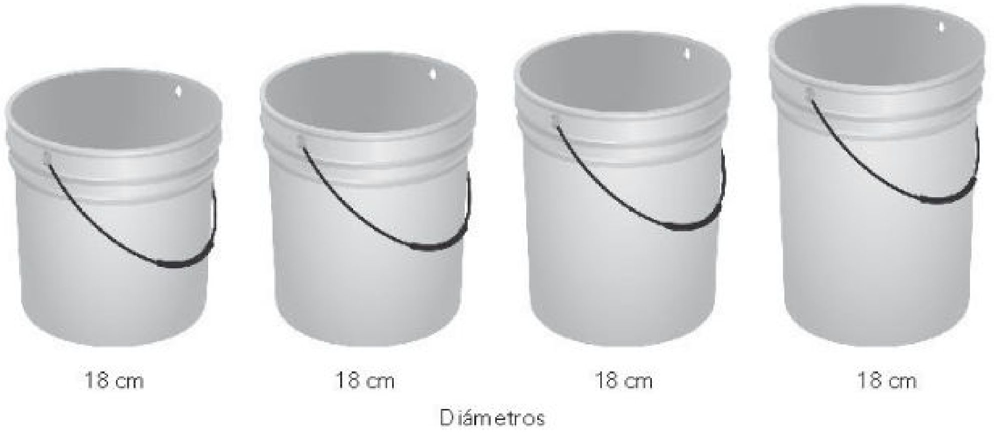
$1\ dm^3 = 0.001\ m^3 = 1000\ cm^3$

$1\ cm^3 = 1\ ml$

Actividades

1. Resuelvan los siguientes problemas utilizando la fórmula del volumen de un cilindro y realicen lo que se indica.

a) En su paletería, Artemio tiene recipientes como los que se muestran en las imágenes.



- Consideren $\pi = 3.14$ y completen la siguiente tabla.

Altura (cm)	Volumen (cm³)	Capacidad (ℓ)
22	5 595.48	
24		6.10
	6 612.84	
		7.12
30		

- Argumenten si hay o no proporcionalidad entre la altura y el volumen del cilindro, cuando el radio permanece constante. ______________________

- En el siguiente recuadro, tracen una gráfica que relacione la altura y el volumen de los recipientes de Artemio.

b) Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otras parejas. En caso de haber diferencias, discutan a qué se deben y argumenten sobre ellas.

c) Orientados por su profesor, y considerando los resultados y procedimientos anteriores, escriban sus conclusiones sobre el volumen de cilindros, cuando varía su altura y el radio permanece constante.

____

2. Un proveedor de Artemio le entregó crema en recipientes como los de las siguientes imágenes.

18 cm   20 cm   22 cm   24 cm

Diámetros

a) ¿Qué diferencia hay entre estos recipientes y los que tenía Artemio? ______________________

b) Elaboren una tabla y la gráfica correspondiente a esos recipientes.

c) Argumenten si hay o no proporcionalidad cuando la altura permanece constante y el radio varía.

____

d) Organizados por su profesor, en plenaria, concluyan sobre lo que sucede cuando en un cilindro la altura es constante y varía el valor del radio.

Radio	Volumen (cm³)	Capacidad (litros)

Actividades

1. Considerado la fórmula para calcular el volumen de un cono, analicen cada planteamiento y realicen lo que se indica.

a) Se tienen algunos contenedores cónicos como los que se muestran en la imagen.

Diámetros

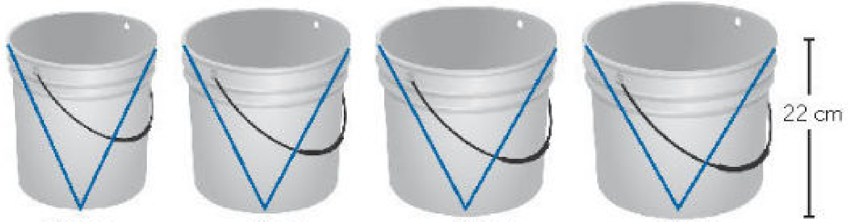
18 cm

- Completen la tabla y elaboren con ella la gráfica correspondiente.
- Argumenten si hay o no proporcionalidad entre la altura y el volumen de los conos cuando el radio permanece constante. ______________________
- Comparen sus respuestas y, orientados por su profesor, concluyan sobre lo que sucede con el volumen de un cono cuando varía su altura y su radio permanece constante.

____

Altura (cm)	Volumen (cm³)
22	
24	
26	
28	
30	

b) Reflexionen acerca de lo que sucederá si los contenedores que dejó el proveedor de Artemio fueran cónicos.



18 cm   20 cm   22 cm   24 cm

Diámetros

- Argumenten si hay o no proporcionalidad entre la altura y el volumen de los conos cuando varía el valor de los radios. ______

- Comparen sus respuestas y, orientados por su profesor, concluyan sobre lo que sucede con el volumen de un cono cuando varía su radio y sus altura permanece constante. ______

Lo que aprendí

1. Aplica las fórmulas para calcular el volumen del cono y del cilindro para resolver el siguiente problema.

   a) La cubeta de yogur que compró Alberto para la fiesta de cumpleaños de su mamá es como la que se muestra en la imagen.

   - ¿Cuántos litros de yogur contiene la cubeta?
   - Si el yogur se va a repartir en vasos cónicos de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura, ¿para cuántas porciones alcanzará el contenido de la cubeta?
   - Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, orientados por su profesor, discutan sobre sus procedimientos y sus resultados.

Desafío

1. Resuelve el siguiente problema.

   a) Cuando terminó un partido de futbol americano, los jugadores del equipo ganador vertieron sobre el entrenador 12 litros de una agua. ¿Cuáles podrían ser las dimensiones del cilindro que contenía el líquido?

   b) Comparte tus respuestas con el grupo. Juntos reflexionen sobre las semejanzas y diferencias que haya.

Enlázate

Para que practiques el cálculo del volumen de cilindros y conos, o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas, te invitamos a que visites la página: http://www.thatquiz.org/es-4/matematicas/geometria/. (Consulta: 27 de marzo de 2013, a las 2:30 horas.) Selecciona: cilindro, cono, superficie, volumen, resolver, resolver x, y realiza lo que se indica. Confronta tus resultados y en caso de que te queden dudas, selecciona la opción "Ver las fórmulas".

Comenta con algunos de tus compañeros acerca de los resultados obtenidos en los ejercicios que resolvieron.

Eje temático	Manejo de la Información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lección 32: Variación lineal o cuadrática

Lo que sabes

1. Aplica la variación lineal o cuadrática en la solución de las siguientes situaciones.

   a) Un camión tiene un rendimiento de 8 kilómetros por litro de gasolina. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con 2, 4, 5.5, 7, y 9.2 litros de gasolina, respectivamente? Completa la tabla.

Litros					
Kilómetros					

   b) En un centro comercial se rentan locales de forma cuadrada. Se dispone de locales de 1.5, 2, 2.5, 3 y 3.5 metros por lado. ¿Cuál es el área de cada uno de los espacios que hay disponibles? Completa la tabla.

Metros por lado					
Área del local					

   c) Contesta las siguientes preguntas.
   - ¿Qué tipo de relación existe entre las cantidades del primer problema?
   - ¿Qué relación encuentras entre las cantidades del problema del centro comercial?
   - ¿Cuáles son las características de una relación proporcional?
   - ¿Cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales?

   d) Compara tus respuestas con las otros compañeros. Juntos reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la ayuda de su profesor, enlisten las características de una relación proporcional. Escríbanlas.

Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y contesten las preguntas.

a) Alicia práctica el atletismo. Ella registró en la siguiente tabla la distancias y tiempos de sus recorridos.

Día	Tiempo (minutos)	Distancia (Kilómetros)
Lunes	5	4
Martes	8	6.4
Miércoles	7	7.7
Jueves	9	7.2
Viernes	10	11

Glosario

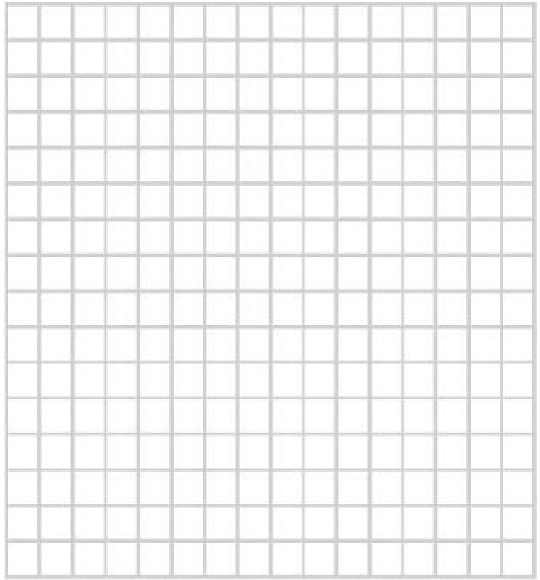
Magnitud. Propiedad física que puede ser medida; por ejemplo, la temperatura, el peso, etcétera.

- ¿Cuántos kilómetros por minuto recorre ella respectivamente cada día? ____ ____ ____ ____ ____
- ¿Por qué las magnitudes de los días lunes y martes presentan una variación lineal?
- Expliquen si las **magnitudes** de los días martes y miércoles tienen o no variación lineal.
- ¿En cuáles días las magnitudes de la tabla experimentan una variación lineal?
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Reflexionen sobre las diferencias y contesten. ¿Cómo determinaron si existe o no una variación lineal en dos magnitudes? ____
- ¿De qué otra manera podemos determinar si dos magnitudes experimentan una variación lineal?
- Compartan sus respuestas y, con la ayuda de su profesor, concluyan sobre si el valor unitario entre dos magnitudes es útil para determinar si experimentan variación lineal. Escriban las conclusiones.

b) La fábrica de jabones "La Limpia", en el mes de febrero produjo 1 300 piezas de jabón, por lo que al venderlas obtuvo $9 100; pero en marzo obtuvo $10 500 por las 1 500 piezas que produjo y vendió.

- ¿Cuál es el precio de un jabón en mes de febrero? ____ ¿Y en el mes de marzo? ____
- Tomando el precio de cualquiera de estos dos meses, ¿cuánto se tendrá que cobrar por 2100 piezas?
- ¿Cuál es el producto de multiplicar las piezas del mes de febrero por la cantidad de dinero cobrada en marzo? ____
- ¿Cuál es el producto de multiplicar las piezas del mes de marzo por la cantidad de dinero cobrada en febrero? ____

- ¿Qué diferencia encuentras entre los productos obtenidos en las dos preguntas anteriores?
- Grafica en el siguiente plano la relación piezas-dinero, y contesta las preguntas.



- ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ____
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la ayuda de su profesor, concluyan sobre la forma de identificar cuándo dos magnitudes guardan una variación lineal. Escriban sus conclusiones. ____

2. Justifica si las magnitudes que se presentan en cada una de las siguientes situaciones guardan o no una variación lineal. Además, escribe sobre la línea la palabra *variación lineal*, sí es que existe dicha variación; de lo contrario, sólo escribe la palabra "no".

a) Dentro de un mercado, en dos puestos de frutas tienen letreros con las ofertas que ofrecen. En uno se venden 4 kg de naranjas a $20. En el otro puesto se venden 3 kg por $15. ____

- Justificación: ____

b) En una tienda de abarrotes, el precio de una botella de un litro y medio de agua es de $10, mientras que una de 250 ml cuesta $4. ____

- Justificación: ____

c) En el zoológico se determinó altura y la masa corporal de dos chimpancés, es decir, se pesaron. Andrew mide 5 pies y pesa 120 kg. Hulk pesa 115.2 kg y mide 4.8 pies. ______

- Justificación: ______

d) Al nacer, un bebe pesó 2 300 g. Al primer mes de edad pesó 2.8 kg; al segundo mes pesó 3 300 g. ______

- Justificación: ______

e) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Justifiquen los métodos empleados y reflexionen sobre las diferencias encontradas.

Actividades

1. Analicen las siguientes situaciones y contesten las preguntas.

a) Un albañil cobró $1 080 por el piso que colocó en un cuarto de forma cuadrada. El piso mide 3 metros por lado. Por otro de la misma forma, sólo que de 5 metros por lado, le pagaron $3000.

- ¿Cuánto cobró por m² en el primer caso? ______ ¿Y en el segundo? ______
- ¿La relación m² precio es una variación lineal? ______
- ¿Cuál es el cociente de dividir 1 080 entre 3? ______
- ¿Y si dividen 1 080 entre 9? ______
- ¿Qué relación encuentran entre el 3 y el 9? ______
- ¿Y de dividir 3000 entre 5? ______
- ¿Y cuál el de dividir 3000 entre 25? ______
- ¿Qué relación encuentran entre el 5 y el 25? ______
- ¿Cuál es la diferencia entre los cocientes obtenidos al dividir entre 9 y 25, respectivamente? ______
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Junto con su profesor, concluyan sobre si con el valor unitario se puede determinar si existe o no una variación cuadrática entre dos magnitudes. Escriban su conclusión. ______

b) Al dejar caer una pelota desde diferentes alturas se obtuvieron los siguientes resultados. Analicen la tabla y contesten las preguntas.

Tiempo (Segundos)	Altura (Metros)
1	4.905
2	19.62
3	44.145
6	176.58

- ¿Cuál es el cociente de dividir 19.62 entre 4.905? ______
- Dos segundos es el tiempo que tardó en recorrer los 19.62 m. ¿Qué relación encuentran entre el cociente anterior y el 2? ______
- ¿Cuál es el cociente de dividir 176.58 entre 4.905? ______
- Seis segundos es el tiempo que tardó en recorrer los 176.58 m. ¿Qué relación encuentran entre el cociente anterior y el 6? ______
- ¿Cómo se obtendrá la altura en metros si la pelota tarda en caer 4 segundos? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? ______
- ¿Qué variación experimentan la relación tiempo-metros en esta situación? ______

c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Contesten las siguientes preguntas.

- ¿Qué diferencia encuentran entre el valor unitario de una variación cuadrática y una lineal? ______
- ¿Cómo se puede determinar si la variación entre dos magnitudes es o no cuadrática? ______

d) De manera grupal, y con la ayuda de su profesor, concluyan sobre cómo se puede determinar si la relación entre dos magnitudes es una variación cuadrática. Escriban sus conclusiones. ______

Notas importantes

Analiza la siguiente información y considérala para complementar tus conocimientos.

Si la representación gráfica de los valores de dos variables corresponde a una recta que *no pasa por el origen* entonces se tratará de una relación de variación lineal del tipo $y = kx + b$. Si la gráfica correspondiente *pasa por el origen* y es generada por una relación del tipo $y = kx$, entonces se trata de una variación proporcional directa.

Cuando se tiene una variación cuadrática, la gráfica generada corresponde a una parábola. En este caso la relación corresponde a $y = x^2$, o bien a alguna forma que corresponde a $x^2 + bx + c$.

Lo que aprendí

1. Analiza las siguientes relaciones y determina si varían linealmente o cuadráticamente. Justifica tu respuesta y contesta la pregunta.

   a) Por una lona de 2 metros de ancho por 2 altura se pagaron $360 pesos, y por otra de 5 metros de ancho y 5 de altura se pagaron $2 250.

   - ¿Qué tipo de variación experimenta la relación metros-precio? ____________________
   - Justifica tu respuesta. ____________________

   b) En un establecimiento de serigrafía, por tres lonas de 2 m por lado se cobró $1 500, y por tres lonas de 3 m por lado se pagaron $1 800.

   - ¿Qué tipo de variación experimenta la relación metros-precio? ____________________
   - Justifica tu respuesta. ____________________

   c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Juntos reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

2. En cada recuadro plantea una situación que varíe linealmente o de manera cuadrática, según se indique para cada caso.

   a) Variación cuadrática.

   b) Variación lineal

   c) Comparen sus planteamientos y evalúen si son o no correctas las variaciones propuestas, según correspondan. Con la ayuda de su profesor, expongan aquellas donde hayan encontrado algún error y, de manera grupal, corríjanla.

Desafío

1. Resuelve el siguiente problema.

   a) Andrea está entrenando para un maratón. Julio, su entrenador, registró la información en la siguiente tabla. Analízala detenidamente, tomando en cuenta que hay tres pares de datos que varían linealmente y otros dos pares que varían cuadráticamente. Encierra con color verde los primeros tres y con azul los de variación cuadrática.

Tiempo (Segundos)	Distancia (Metros)
3	72
2	32
5	120
4	128
6	180
11	264

   b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y evalúen si son o no correctas. De acuerdo con las características de cada variación, corrijan sus errores. De manera grupal, y con la orientación de su profesor, anoten en el pizarrón las respuestas correctas.

Eje temático	Manejo de la Información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Lección 33: Resultados equiprobables y no equiprobables

Lo que sabes

1. Con base en tus conocimientos sobre la probabilidad y sus características, analiza la siguiente situación y contesta las preguntas.

a) Rosa, Andrea y Ximena, quieren sortear la televisión que se ganaron en el concurso de una televisora. Deciden lanzar un dado para saber quién se queda con el aparato. Rosa ganará la televisión, si el dado cae un múltiplo de 3; Andrea, si cae un número par; Ximena, si cae un número menor a 3. De los eventos anteriores.

- ¿Cuáles son independientes? ____
- ¿Cuáles son complementarios? ____
- ¿Cuáles son **mutuamente excluyentes**? ____
- Román, hermano de Andrea, afirma que los eventos de Rosa y Ximena son complementarios. Explica si Román tiene o no razón en lo que afirma. ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane cada una de ellas? ____
- Rosa y Ximena son hermanas y viven en la misma casa. ¿Cuál es la probabilidad de que la televisión quede en la casa de Rosa y Ximena? ____
- Como Ximena fue quien participó más en el concurso, le propone a Andrea lanzar una moneda: si cae sol, ella lanzará el dado. ¿Qué probabilidad tiene de que gane Andrea la televisión? ____

Glosario

Mutuamente excluyente. Implica que una persona, objeto o medición se incluye en una sola categoría.

b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Juntos reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado y con la ayuda de su profesor, escriban los conceptos que se solicitan.

- Eventos mutuamente excluyentes. ____
- Eventos complementarios. ____
- Eventos independientes. ____
- Dentro de la probabilidad, ¿a qué se le llama regla del producto y cuándo se aplica? ____
- ¿A qué se le llama regla de la suma y cuándo se aplica? ____

Actividades

1. Con el uso de los criterios para el calculo de la probabilidad, analicen las siguientes situaciones y resuélvanlas.

a) Juan y Daniel juegan volados con una moneda de diez pesos. Juan pagará a Daniel cinco estampas si cae águila; será lo contrario si cae sol.

- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan? ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Daniel? ____
- Expliquen si estos dos eventos son o no complementarios. ____
- Expliquen si estos dos eventos son mutuamente excluyentes. ____
- Argumenten por qué el juego propuesto por ambos es justo o no. ____

b) Para decidir quién debe lavar los trastes, Alberto, Ana y Lizbeth, escogieron cada dos caras de un dado: él escogió 1 y 6; Ana, 3 y 4; Lizbeth, los que sobraban.

- ¿Cuál es la probabilidad para cada una de las caras del dado? ____
- ¿Quién tiene más probabilidad de lavar los trastes? ____
- ¿Por qué? ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane cualquiera de los tres? ____
- Por qué se puede afirmar que los eventos que escogieron cada uno de ellos son mutuamente excluyentes. ____
- Justifiquen si los eventos de Ana y Alberto son o no complementarios. ____
- Son o no independientes los tres eventos? ____
- ¿Por qué? ____
- Argumenten por qué el juego propuesto por ambos es o no justo. ____

c) Para escoger al presidente de la sociedad de alumnos, se tienen contemplados a los mejores alumnos de los cuatro grupos de tercer grado: del grupo A participarán cinco; del B, sólo tres; siete del C y diez del D.

- ¿Cuál de los cuatro grupos tiene mayor posibilidad que de ahí se escoja al presidente? ____
- ¿Cuál es el grupo que tiene menos posibilidades de que salga de ahí el presidente escolar? ____
- ¿Cuál es la probabilidad que salga de los grupos A o B? ____

- Justifiquen por qué todos los grupos tienen o no las mismas probabilidades que de ahí salga el próximo presidente.
- Por qué se puede afirmar que son eventos mutuamente excluyentes.
- Por qué se podrá decir que un grupo es o no complemento de otro grupo.

d) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Analicen sus respuestas y contesten las siguientes preguntas.

- De los tres casos que se han resuelto, ¿en cuál de ellos las posibilidades de ganar para todos los que juegan son las mismas?
- De los casos que tienen igual posibilidad de ganar, ¿qué características tienen en común?
- ¿Qué importancia tiene que los eventos sean mutuamente excluyentes para que haya o no la misma posibilidad de ganar para todos?
- ¿Qué importancia tiene que un evento sea complementario a la suma de los demás para que haya o no la misma posibilidad de ganar para todos?
- Para que un juego sea justo, los resultados deben ser equiprobables, es decir, deben existir las mismas oportunidades de ganar para todos. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que los resultados de un juego sean equiprobables?

e) Comparen sus respuestas las de otras parejas. De manera grupal, y con la ayuda de su profesor, concluyan sobre cuáles son las condiciones para que los resultados de un juego sean equiprobables. Escriban sus conclusiones.

Actividades

1. Analicen los siguientes juegos y determinen si son o no justos de acuerdo con la equiprobabilidad de sus resultados.

a) En la feria de un pueblo han colocado un puesto de dados, donde una de las modalidades es escoger entre tres opciones: números grandes, números pequeños y el 7. El juego consiste en lanzar dos dados y sumar los puntos que muestren. Si la suma es mayor a 7, se considera un número mayor. Será número menor si la suma es menor a 7.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados la suma sea un número grande?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados la suma sea un número pequeño?

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados la suma sea un 7?
- De acuerdo con estas respuestas, argumenten si este juego es justo o no.

b) Otra modalidad del juego anterior es que se escoja por número: si la suma es 2, 3, 11 o 12, el del establecimiento paga 5 veces lo que se apueste. Si la suma es 4, 5, 9 o 10, se paga el triple. Si cae 6 u 8, se paga el doble. Gana el del establecimiento si cae 7.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño pague el quíntuple de la apuesta?
- Si a algún jugador se le diera a escoger 2 y 3 o 11 y 12, argumenta sobre cuál sería su mejor opción.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño pague el triple de la apuesta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño pague uno a uno la apuesta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño gane la apuesta?
- Justifiquen por qué recomendarían a un jugador la elección de su jugada.
- Argumenten si este juego es justo o no.

c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.

2. Con base en el juego de lanzar dos dados, discutan y planteen un sistema de premios, de modo que el juego anterior sea justo, tomando por separado cada una de las sumas de los dados. Escríbanlo, para ello tomen en cuenta la información de la tabla siguiente.

Suma	Probabilidad	Suma	Probabilidad
2	$\frac{1}{36}$	8	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	9	$\frac{4}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	10	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	11	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	12	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	TOTAL	$\frac{36}{36}$

- ¿Qué se debe tomar en cuenta para plantear un juego justo?
- Comparen su sistema de premios con el de otras parejas y concluyan, junto con su profesor, sobre cómo se puede plantear que un juego sea justo, tomando en cuenta la equiprobabilidad de sus resultados. Escriban sus conclusiones.

Notas importantes

Lee la siguiente información para complementar tus ideas.

Un evento es equiprobable a otro si los resultados a obtenerse son los mismos. Por ejemplo: al lanzar una moneda, sus eventos son equiprobables, ya que tienen una probabilidad de 50 %. Al lanzar un dado, cada cara tiene $\frac{1}{6}$ de probabilidad de darse. En un mismo experimento al azar, sus eventos pueden ser no equiprobables. Por ejemplo, al lanzar un dado, se dan dos eventos.

Evento A: Que caiga un número par

Evento B: Que caiga un múltiplo de 4

El evento A tiene una probabilidad de darse de 50 % porque hay tres posibles resultados (2, 4 ó 6).

El evento B tiene probabilidad de $\frac{1}{6}$.

Un juego es justo si se toma en cuenta la equiprobabilidad de los resultados que se puedan obtener.

Lo que aprendí

1. Considerando las características de la equiprobabilidad, analiza las siguientes situaciones y contesta la pregunta.
   a) Agustín, Emmanuel y Ximena, juegan a los volados. Ellos lanzan las tres monedas. Ximena ganará si todas caen sol o águila; Emmanuel gana si caen dos águilas; Agustín gana si caen dos soles.
      - Argumenta si este juego es o no justo. ______

   b) Rosa María y Alberto tienen que abrir el negocio de su mamá durante toda la semana, pero uno tendría que hacerlo una vez más que el otro. Ellos lo dejaran a la suerte y lanzarán dos monedas: si caen dos soles, él abrirá cuatro días; si cae al menos un águila, ella abrirá el resto de la semana.
      - Argumenten si este juego es o no justo. ______

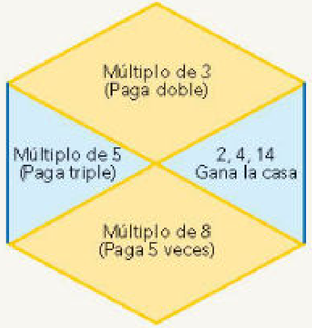
   c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Juntos reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado.
2. Basándose en el lanzamiento de un dado y de cuatro eventos, planteen un juego justo.

   ______

   a) Compara tu juego con el de otros compañeros y justifica por qué es justo. Con la orientación de su profesor, determinen aquellos que no son justos. Analicen alguno de ellos y vean la posibilidad de hacerlo justo. Escriban la forma de hacerlo justo. ______

Desafío

1. Analiza y determina si el siguiente juego es o no justo para quien lo juegue.
   a) En una urna se tienen 10 esferas enumeradas con los diez primeros números pares. El coordinador revuelve las esferas y pide a alguien de los que están apostando que la saque. Analiza el tablero y contesta.



   - ¿Cuál de las tres opciones que se tienen para jugar elegirías si quieres tener mayor posibilidad de ganar? ______
   - ¿Qué eventos son equiprobables? ______
   - ¿Cómo se organizaría el juego para que sólo tenga dos opciones y que sean equiprobables? ______
   - Argumenta tu respuesta. ______
   - Argumenta si este juego es justo o no. ______

   b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, con la ayuda de tu profesor, analicen las diferencias que hayan encontrado.

Horizonte cultural

Lee la siguiente información para complemetar sus conocimientos acerca de la probabilidad. Consulta más informacion y compártela con tus compañeros.

La historia de la probabilidad comenzó en el siglo XVII de n.e., cuando Pierre Fermat y Blaise Pascal trataron de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Aunque algunos marcan sus inicios cuando Cardano (jugador) escribió hacia 1520 *El libro de los juegos de azar*, no es hasta dicha fecha que comienza a elaborarse una teoría aceptable sobre los juegos.

Durante el siglo XVIII, debido muy particularmente a la popularidad de los juegos de azar, el cálculo de probabilidades tuvo un notable desarrollo sobre la base de la anterior definición de probabilidad.

A mediados del siglo XIX, un fraile agustino austríaco, Gregor Mendel, inició el estudio de la herencia, la genética, con sus interesantes experimentos sobre el cruce de plantas de diferentes características. Su obra, *La matemática de la herencia*, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de probabilidad a las ciencias naturales

Desde los orígenes, la principal dificultad para poder considerar a la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática.

A principios del siglo XX, el matemático ruso Andrei Kolmogorov la definió de forma axiomática y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad, que en la actualidad es parte de una teoría más amplia, como es la teoría de la medida.

FUENTE: http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html. (Consulta: 2 de febrero de 2013, a las 17:05 horas.)

Evaluación tipo PISA

El carpintero

Don Manuel es un carpintero al que le encargaron colocar duela en un vestidor de una tienda de ropa. El encargado le señala un espacio rectangular que tiene 9 m de perímetro y una superficie de 4.5 m².

Pregunta 1: ¿Cuáles son las dimensiones del espacio en donde debe colocar la duela?

Pregunta 2: La base de la duela es un material de hule-espuma enrollado y se adquiere por metros. Si el rollo tiene 1.2 m de ancho y 20 m de largo, y se puede recortar libremente para ajustarlo al lugar en que será colocado, describan dos formas distintas de recortarlo, de manera que se desperdicie la menor cantidad de material.

Forma 1	Forma 2

La tienda de abarrotes

Jesús, quien atiende la panadería "El bolillo", decidió hacer la tabla que se muestra abajo con la relación piezas de pan-precio.

Piezas	3	5	8	14
Precio	22.50	37.50	60.00	105.00

Pregunta 1: De acuerdo con la información de la tabla, ¿cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la relación piezas-precio?

a) $y = 7.5x + 1.5$

b) $y = 7.5x$

c) $y = 7.0x + 1.5$

d) $y = 7.0x$

Evaluación tipo PISA

Pregunta 2: Encierra la palabra "Sí" cuando el número de la columna de la izquierda corresponda a la función que modela la relación piezas-precio; de lo contrario, encierra la palabra "No"

Número	Opción	
30.00	Sí	No
47.50	Sí	No
55.00	Sí	No
82.50	Sí	No

La rifa

Doña Alberta quiere rifar entre sus 3 sobrinos un juego de mesa. Para ello decidió cortar 20 papelitos del mismo tamaño, los enumeró del 1 al 20, los dobló y los depositó dentro de una bolsa negra. Solicitó que cada uno escogiera tres números y que dieran las características de ellos.

Elsa escogió los números pares mayores a 15.

Juan se decidió por los múltiplos de 4 menores de 15

Raúl dijo que se quedaba con los números primos.

Pregunta 1: ¿Cuál es la probabilidad de que gane cualquiera de las dos mujeres? ____________

Pregunta 2: Si quisieras ganar el juego de mesa, ¿cuál de los tres eventos escogerías? ____________

Argumenta tu respuesta.

El tanque de gas

Un tanque de gas tiene forma cilíndrica, contiene 20 litros y se sabe que su altura es de 65 cm.

Pregunta 1: ¿Cuánto mide el área de su base?

Pregunta 2: Para verificar el contenido y calidad del gas, el contenido de un tanque se vacía en embudos de forma cónica cuya altura es de 13 cm y el de 7 cm. Esto se realiza para filtrar el gas. ¿Cuántos conos se necesitan para todo el contenido de un tanque?

Bibliografía

Bibliografía Consultada

Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny, *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid, Síntesis, 1987 (Matemáticas: cultura y aprendizaje).

Araujo Pardo, M., *Matemáticas I*, México, CONALITEG, 2007.

Backhoff, Eduardo, *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*, México, Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2006.

Batanero, Carmen y Carmen Díaz, *El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística*, ICE, Zaragoza, J. Patricio Royo, 2004.

Cabanne, N., *Didáctica de las matemáticas: ¿Cómo aprender? ¿Cómo enseñar?*, Argentina, Bonum, 2006.

Callejo, María Luz, *Un club matemático para la diversidad*, Madrid, Narcea, 1998.

Carrasco Licea, G. *et al.*, *Matemáticas 1: Libro de recursos para el profesor*, México, Santillana, 2011.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, FCE, 2002.

Hugo Espinoza Pérez, Silvia García Peña, Marco Antonio García Juárez, *Fichero de actividades didácticas*, México, Secretaría de Educación Pública, 2001.

INEE, *PISA para docentes: La evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, CONALITEG, 2005.

Mancera, Eduardo, *Saber matemáticas es saber resolver problemas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

Ruiz Machorro, J. A. *et al.*, *Curso de reforzamiento y regularización. Matemáticas I*, México, CONALITEG, 2009.

SEP, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro*, México, SEP, 2011.

SEP, *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio 2006*, México, SEP, 2006.

Wentworth, Jorge y David Eugenio Smith, *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 2001.

Bibliografía recomendada para el alumno

Adler, I., *Matemáticas: La historia de los números, los símbolos y el espacio*, México, Novaro, 1977.

Alem, Jean-Pierre, *Juegos de ingenio y entrenamiento matemático*, Barcelona, Gedisa, 2001.

Andradas Heranz, Carlos, *Póngame un kilo de matemáticas*, Madrid, Ediciones SM, 2000.

André, Jouette, *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook, 2004, (Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).

Araujo Pardo, M., *Matemáticas I*. México, CONALITEG, 2007.

Baldor, A., *Álgebra*, México, Publicaciones Cultural, 1998.

Berlanga, Ricardo, Carlos Bosch y Juan José Rivaud, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, FCE, 2009 (Ciencia para todos).

Bolt, B., *Más actividades matemáticas*, España, Labor, 1998.

Callejo, María Luz, *Un club matemático para la diversidad*, Madrid, Narcea, 1998.

Corbalán, F., *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Madrid, Síntesis, 1994.

Ensenberger, H. M., *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.

Malba, T., *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.

Peña, J. A. de la, *Geometría y el mundo. Biblioteca Juvenil Ilustrada*, México, Santillana, 2004.

Pérez, E., *Retos*, México, Esfinge, 1994.

Prieto, Carlos, *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, México, FCE, 2009 (Ciencia para todos).

Van Cleave, J., *Matemáticas para niños y jóvenes*, México, Limusa, 1997.

Wylie, C.R., *101 desafíos a la lógica*, México, Ediciones Suromex, 2005 (Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).

Bibliografía

Bibliografía recomendada para el profesor

Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny, *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, Síntesis, 1987 (Matemáticas: cultura y aprendizaje).

Bosch Giral, C. y C. Gómez Wulschner, *Encuentro con las matemáticas*, México, Nuevo México, 2009.

Cabanne, N., *Didáctica de las matemáticas: ¿Cómo aprender? ¿Cómo enseñar?*, Argentina, Bonum, 2006.

Carrasco Licea, G. *et al.*, 2011, *Matemáticas 1. Libro de recursos para el profesor*, México, Santillana.

Etayo, J., *Enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*, España, Rialp, 1995.

Fernández, Antonio y Luis Rico, *Prensa y educación matemática*, Madrid, Síntesis, 1992 (Matemáticas: cultura y aprendizaje).

Grupo Arzaquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1993.

Pérez, Hugo Espinoza, Silvia García Peña y Marco Antonio García Juárez, *Fichero de actividades didácticas*, México, SEP, 2001.

INEE, *PISA para docentes: La evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, CONALITEG, 2005.

Pérez, M. y S. Pérez, *Matemáticas: Aventura del pensamiento 1*, México, Fernández Editores, 2009.

Ruiz Machorro, J. A. *et al.*, *Curso de reforzamiento y regularización, Matemáticas I*. México, CONALITEG, 2009.

Santos, L., *Principios y métodos para la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

SEP, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro*, México, SEP, 2011.

SEP, *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio 2006*, México, SEP, 2006.

Ursini, Sonia *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2003.

Sitios web consultados

http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117

http://www.thatquiz.org/es/

http://repositorio.pedagogica.edu.co/xmlui/bitstream/handle/123456789/247/TE-15472.pdf?sequence=1.

http://tutormatematicas.com/GEO-m/Triangulos_congruentes_LLL_LAL_ALA_AAL_CC_HC_HA_CA.html

http://www2.uah.es/vivatacademia/anteriores/veintiocho/curiosidades.htm

https://sites.google.com/a/misena.edu.co/mundomatematica/movimiento-en-el-plano

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2003/movimientos/

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Triangulos_congruencia.html

https://sites.google.com/site/simetriasytraslacionesrchg/home/modulo-1/enlaces-1

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/descargasrecursos/plc/html/primaria/que_forma_tiene_gd.pdf

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U07_L2_T1_text_final_es.html

http://mimosa.pntic.mec.es/~dobo/geoweb/trian9.htm

http://mimosa.pntic.mec.es/~dobo/geoweb/trianejer.htm

http://personales.unican.es/alvareze/LabMatematicas/pitagoras/index.htm

http://boj.pntic.mec.es/acorra7/puzzles.htm

http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/PuzlesPitagoricos-JS/index.html

http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

http://www.oni.escuelas.edu.ar/2009/BUENOS_AIRES/1597/curiosidades.htm

https://www.matesfacil.com/resueltos-ecuaciones-segundo-grado.htm

Bibliografía

http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/06_Semejanza/Ejercicios_resueltos.pdf

http://recursostic.educacion.es/eda/web/WEB_EDA/Documentos/materiales/miguel_martin/Unidad%20Semejanza/Unidad/gigantes.htm

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html

http://www.filosofia.org/cur/pre/tales.htm

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html

http://www.thatquiz.org/es/previewtest?G/I/Y/B/W3BF1358788931

http://fooplot.com/?#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/caracteristicas/llenado_porcentaje/actividad.html

http://www.arrakis.es/~mcj/notas019.htm

http://www.dmae.upct.es/~juan/matbas/matbas.htm

http://edumate.wordpress.com/2008/02/03/anecdota-de-gauss/

http://www.estudiantes.info/matematicas/geometria/2-eso/cilindros,%20conos%20%20y%20%20esfera.htm

http://www.definicionabc.com/general/silo.php#ixzz2Hmae6A4O

http://www.aulafacil.com/matematicas-trigonometria-plana/curso/Temario.htm

http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/enteros2/

https://www.thatquiz.org/es-1/matematicas/aritmetica/

https://sites.google.com/site/emp35angulos/

http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/41413/unicidad_en_triangulos.htm

http://www.disfrutalasmatematicas.com/dinero/interes.html

http://sercurioso.com/2009/03/10-curiosidades-piramides-egipto.html

http://www.escueladigital.com.uy/geometria/5_cuerpos.htm

http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm

http://www.ite.educacion.es/

http://rincones.educarex.es/matematicas/

http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/1/0

http://funclineal.galeon.com/

www.sectormatematica.cl/media/NM2/NM2_metodos_sist_ecuac.doc

http://www.aaamatematicas.com/mea514x3.htm

http://www.quimicaweb.net/

Créditos iconográficos

©Depositphotos: pp. 12, 22, 27, 86, 89, 130, 132, 176, 183, 244. ©Shutterstock: pp. 16, 34, 39, 40, 66, 85, 114, 136, 166, 178, 183, 184, 207, 224, 254. **p. 28**: *Pantógrafo 1970* (2011), fotografía: Gmhofmann, Wikimedia. **p. 137**: *Tales de Mileto* (1875), ilustración: Ernest Wallis, Wikimedia.

Matemáticas 3

Estrategias del pensamiento

Tercer Grado
Educación Secundaria

Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento es una obra que forma parte de la "Serie Aprendizajes". Las secciones que conforman esta obra atienden a un enfoque constructivista, el cual pretende que el alumno aprenda y desarrolle conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas, las cuales podrá aplicar dentro y fuera del ámbito educativo. Asimismo, dentro de cada una de estas secciones se plantean desafíos matemáticos donde el alumno tendrá la oportunidad de resolver problemas, de manera autónoma y en situaciones cotidianas.

Los principales retos planteados en esta obra, y que se pretende que logren los alumnos, son:

- Estimular el interés y la reflexión para que, por medio del pensamiento matemático, formulen argumentos que validen los resultados provenientes de las diferentes problemáticas a las que se enfrenten cotidianamente.
- Saber identificar, plantear y resolver problemas utilizando diversos procedimientos y reconociendo los más eficaces.
- Expresar, representar e interpretar información contenida en una situación o fenómeno.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados mediante el razonamiento y la demostración.

Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento se caracteriza por buscar en los alumnos un desarrollo integral con la finalidad de que conozcan y apliquen adecuadamente los números y las operaciones al resolver un problema en diferentes contextos.

Grupo Editorial Patria

ISBN 978-607-438-700-1